Subject
Date

فصل ۱: مقدمه‌ای بر دینامیک

در استاتیک: تأثیر نیروها روی اجسام ساکن بررسی می‌کردیم.

در دینامیک: حرکت اجسام تحت اثر نیرو

۲ بخش اصلی:
- سینماتیک (kinematics): بررسی حرکت بدون توجه به نیروهای مولد
- سینتیک (kinetics): بررسی حرکت با توجه به نیروهای مولد

تا آخر ترم به ۲ طورکلی این ۲ بخش را بررسی می‌کنیم

در دینامیک ۲ دسته از سیستم‌ها را بررسی می‌کنیم:
- ذره (Particles) — میان‌ترم
- جسم صلب (Rigid bodies) — پایان‌ترم

مفاهیم اساسی:

فضا: میدان هندسی که توسط اجسام اشغال می‌شود. (توضیح استاد: چرا میدان هندسی؟ چون طول، عرض و ارتفاع دارد) جهت استاتیک در اصل همان location یا وضعیت آن تعیین می‌شود.

وضعیت اجسام در فضا نسبت به یک دسته مرجع هندسی توسط اندازه‌گیری خطی و زاویه‌ای تعیین می‌شود.

دسته اینرسی اساسی (ثابت)

توضیح خطی و زاویه‌ای در صفحه بعد

خطی و زاویه‌ای

orientation + Position → دستگاه اینرسی اساسی (ثابت)

اندازه "مطلق"

فرانکفورت متحرک

دستگاه نصب شده روی سطح زمین به علت حرکت زمین در حقیقت دستگاه ثابت است ولی در غالب موارد، دستگاه ثابت فرض می‌گردد

(به جز حرکت سفینه‌ها، ماهواره‌ها، ...)

زمان: معیار سنجش برای وقوع رویدادها

جرم: مقاومت جسم در برابر تغییر حرکت (معیار سنجش کمی لختی یا اینرسی)

نیرو: تأثیر برای یک جسم بر جسم دیگر → مشخصه‌های بردار: راستا و جهت، بزرگی

ذره (Particle): جسم با ابعاد ناچیز

معیار در نظر گرفتن ذره یعنی ابعاد در تشریح حرکت تأثیر ناچیزی داشته باشد.

گاهی هواپیما هم ذره می‌شود مثلاً در ارسال حرکت تهران مشهد که 900km است ولی طول هواپیما 100m است.

Scanned by CamScanner

Subject
Date

جسم صلب: جسمی که تغییر شکل آن در مقایسه با (ابعاد کلی جسم یا تغییرات موقعیت کلی جسم) ناچیز باشد.

به طورکلی اینکه حرکتی مشخص می کنی (نوع حرکت) که جسم صلب است یا ...

بردار و اسکالر: $\vec{v}$ بردار سرعت

v مقدار اسکالر متناظر با بردار سرعت

$$\vec{v}_1+\vec{v}_2 \neq v_1+v_2$$

قوانین نیوتن (newton's laws)

قانون اول: اگر بر ذره‌ای نیرو وارد نشود یا برآیند نیروهای وارد بر آن صفر باشد، ذره در حال سکون باقی می ماند یا به حرکت با سرعت ثابت در امتداد خط راست ادامه می دهد

چرا چون اگر تغییر جهت بدهد شتاب ایجاد می کند و در این صورت برآیند نیروهای موجود صفر نیست چون شتاب دارد.

قانون دوم: شتاب هر ذره با برآیند نیروهای وارد بر آن متناسب و هم جهت است.

$\vec{F}=m\vec{a}$

* این شتاب: شتاب ذره مطلق است نسبت به یک دستگاه ثابت (زمین)

* قانون اول از قانون دوم قابل استنتاج است.

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

بیان دیگر قانون دوم: تعبیر درست تر

برآیند نیروهای وارد بر یک ذره برابر میزان تغییر مومنتم ذره نسبت به زمان می‌باشد.

(مومنتم: یا تکانه خطی سیستم)

$$\vec{G} = m\vec{V} \quad \leftarrow \quad \vec{F} = \frac{d(\vec{G})}{dt}$$

($\vec{G}$: تکانه خطی سیستم)

$$= \vec{F} = \frac{d}{dt}(m.\vec{V})$$

اگر جرم با زمان تغییر کند این بیان با بیان قبل فرق می‌کند مثل موشک (نه نسبت)

به ازای جرم ثابت ۲ بیان معادل یکدیگرند.

قانون سوم نیوتن:

نیروهای کنش و واکنش بین اجسامی که با هم اثر کنش دارند — از لحاظ اندازه و راستا برابر ولی از نظر جهت مخالف یکدیگرند.

PAPCO

Scanned by CamScanner

سیستم آحاد:

۳ سیستم متداول

- SI ← سیستم مطلق
- آمریکایی ← سیستم گرانشی
- انگلیسی

(Imprial) همون سیستم آمریکایی ولی یه ذره تفاوت داره.

کمیت	علامت	SI واحد	SI علامت	آمریکایی واحد	آمریکایی علامت	انگلیسی واحد	انگلیسی علامت
جرم	M	کیلوگرم	kg	اسلاگ	slug	پوند جرمی (پوند mass)	lbm
طول	L	متر	m	فوت	ft	فوت	ft
زمان	T	ثانیه	s	ثانیه	sec	ثانیه	sec
نیرو	F	نیوتن	N	پوند	lb	پوند نیرویی (پوند force)	lbf

(سه کمیت اول در SI و آمریکایی: اصلی)

نکته: در سیستم SI نیرو برحسب سه کمیت دیگر تعریف می‌شود.

یک نیوتن: نیرویی که به یک کیلوگرم جرم شتاب $1 m/s^2$ بدهد.

$$1(N) = 1(kg)\,1(m/s^2)$$

در سیستم آمریکایی جرم بر حسب سه کمیت دیگر تعریف می‌شود.

یک اسلاگ: جرمی است که تحت اثر نیروی یک پوند، شتاب $1 ft/sec^2$ بدهد.

$$1slug = ۳۲٫۱۷۴\ lbm$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

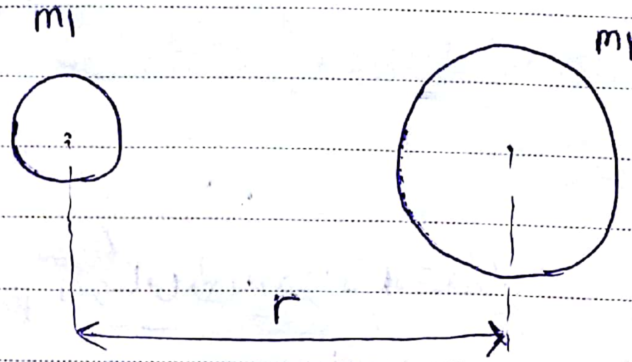
Subject
Date

قانون گرانش نیوتن

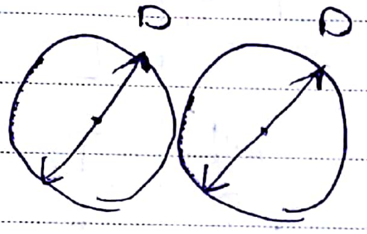
ثابت گرانش ← G

$$F = \frac{G m_1 m_2}{r^2}$$

$$G = 6.673 \times 10^{-11} \; m^3/kg\,s^2$$



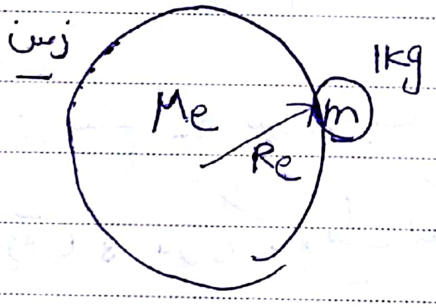
* اگر ابعاد کوچک باشد ، نیرو ناچیز است.



$D = 100\,mm$

$\rho = 7800 \; kg/m^3$ → $F = 9.51 \times 10^{-8}\,N$ → قابل صرف نظر

اگر جرم زیاد باشد مثل زمین.



$M_e \rightarrow 5.976 \times 10^{24}\,kg$

$R_e \rightarrow 6.371 \times 10^{6}\,m$

→ $r \simeq R_e$ ↓ فاصله

$$F = \frac{G M_e m}{r^2} = G\frac{M_e}{R_e^2} = 9.825\,N$$

$$F = G\frac{M_e}{R_e^2}\, m \qquad F = a\, m \rightarrow \boxed{a = \frac{G M_e}{R_e^2} = g}$$

شتاب گرانش زمین

* تغییرات g نسبت به ارتفاع

g_0: شتاب مطلق ناشی از گرانش در سطح دریا

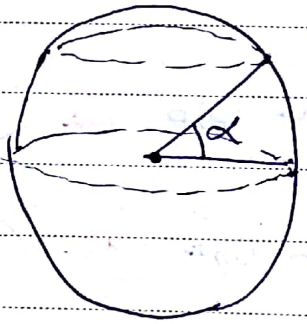
$$g = g_0 \frac{R_e^2}{(R_e+h)^2}$$

برای ماهواره‌ها و موشک‌ها چون h را تغییر می‌کند شتاب گرانش می‌تواند متغیر نسبت به زمان باشد.

شتاب در دستگاه متصل به زمین مقدار ناچیزی از مقدار مطلق شتاب کمتر است.

نکته: به دلیل
- کروی نبودن زمین ← شعاع را عوض می‌کند
- حرکت دورانی زمین

ما از این فرمول استفاده می‌کنیم ←
$$g = 9.780327\left(1+0.0005279\sin^2\gamma+0.000023\sin^4\gamma+\dots\right)$$



γ: عرض جغرافیایی

مقادیر استاندارد بین‌المللی:

$g = 9.806\ m/s^2$

$= 32.1740\ ft/sec^2$

زمین در سطح دریا، $\gamma = 45^\circ$

PAPCO

Scanned by CamScanner

فصل دوم: سینماتیک ذرات

سینماتیک: شاخه‌ای از دینامیک است که حرکت جسم را بدون اشاره به نیروهایی که باعث حرکت می‌شوند و یا در نتیجه حرکت به وجود می‌آیند، بیان می‌نماید.

در حرکت آونگ شتاب زاویه‌ای می‌توانیم نداشته باشیم ولی حتماً شتاب وارد به مرکز حتماً داریم.

کاربرد: طراحی بادامک، چرخنده، رابط اتصال، ماشین‌ها و...

سینماتیک:
- ذره: جسمی که ابعاد فیزیکی آن در مقایسه با ابعاد حرکتی (مسیر) بسیار کوچک باشد.
- مجموعه ذرات
- جسم صلب

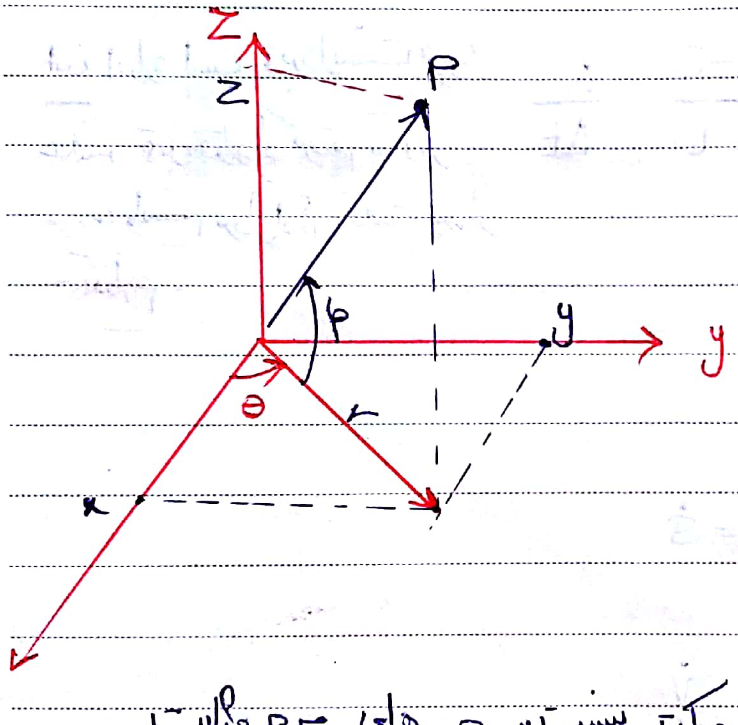
حرکت ذره:
- مقید: حرکت محدود به مسیر مشخص است ← مهره‌ای توسط نخ در مسیر دایره ای
- نامقید: حرکت محدود به مسیر مشخص نیست ← نخ پاره شده باشد

Scanned by CamScanner

جهت بیان موقعیت ذره نیاز به دستگاه مختصات می‌باشد.

- کارتزین $x-y-z$
- استوانه‌ای $r-\theta-z$
- کروی $r-\theta-\varphi$

هر یک حرکت‌ها رو در هر دستگاه‌های می‌شود نشان داد ولی بسته به این که نوع حرکت چه جوری است. دست بسته به نوع حرکت ما تصمیم می‌گیریم از کدام دستگاه مختصات استفاده نماییم. مناسب‌تر را انتخاب می‌نماییم.



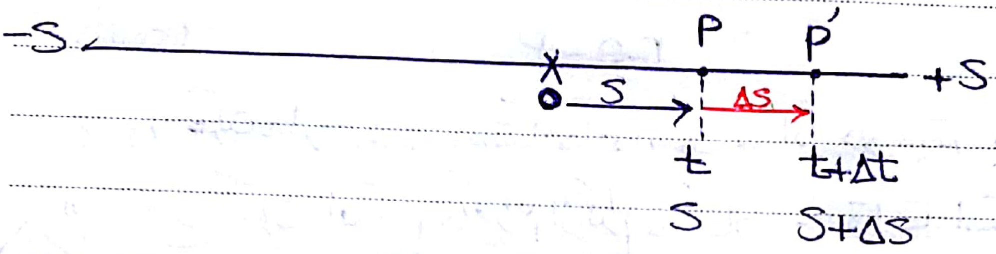
تحلیل حرکت:
- مطلق : بیان حرکت نسبت به محورهای مرجع ثابت
- نسبی : بیان حرکت نسبت به محورهای مرجع متحرک

Scanned by CamScanner

Subject
Date

حرکت مستقیم الخط :

بررسی سینماتیک ذره در فضای یک بعدی



سرعت متوسط

$$v_{ave} = \frac{(s+\Delta s)-s}{(t+\Delta t)-t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

این اندازه است و بردار نیست چون جلسه قبل قرارداد کردیم که اگر می‌خواستیم بردار باشد علامت بردار می‌گذاریم.

شتاب متوسط

$$a_{ave} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

سرعت لحظه‌ای

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

شتاب لحظه‌ای

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$$

از طرفی

$$a = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s}$$

نکته : شتاب کاهنده (یا شتاب منفی) (-) : ذره در حال کاهش سرعت

شتاب افزاینده (یا شتاب مثبت) (+) : ذره در حال افزایش سرعت

نکته دیگر : اگر در جهت منفی حرکت کنیم و سرعت رو کم کنیم در اصل شتاب افزاینده داریم.

PAPCO

Scanned by CamScanner

شتاب و سرعت کمیت های برداری هستند ← راستا، جهت، اندازه

در فضاهای ۱ بعدی ← راستا: ثابت
جهت: توسط علامت جبری + و - تعیین می شود.

راستا ثابت است
جهت رو هم میشه با علامت های + و - نشون داد.

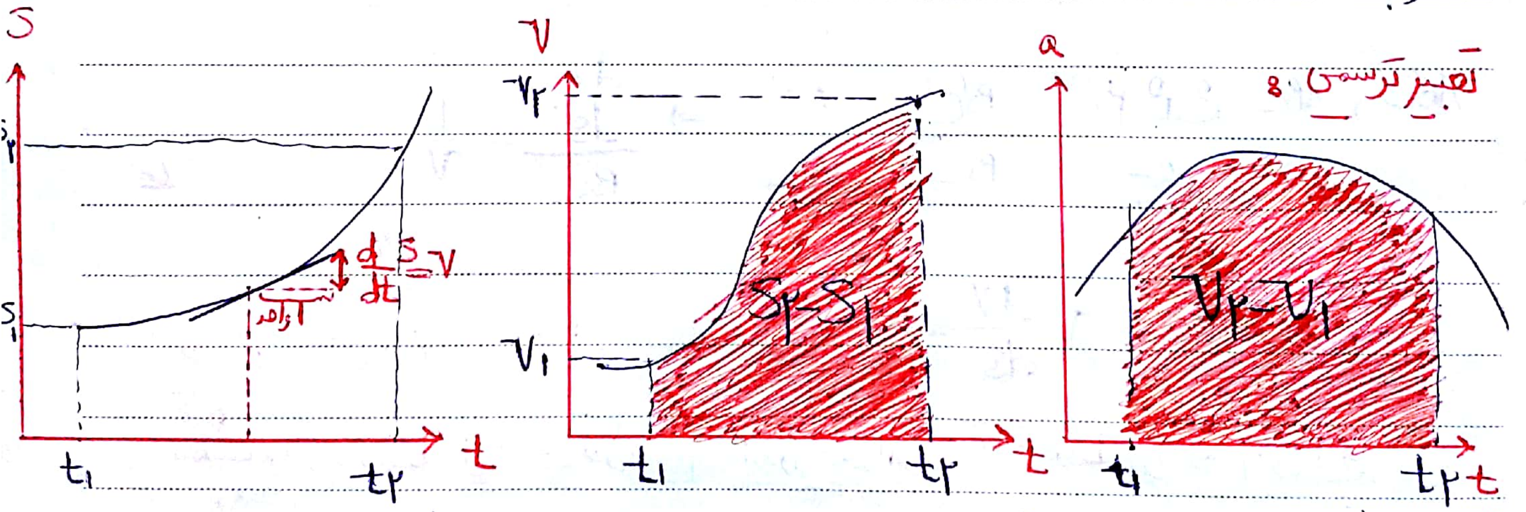
نکته: جهت مثبت a و v را جهت مثبت s در نظر می گیریم.

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\,\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds}\,v \rightarrow \boxed{a\,ds = v\,dv} \quad (*)$$

$\frac{ds}{dt}$: سرعت لحظه ای v

سرعت و شتاب را براساس تغییر مکان به هم مربوط می کند.

تعبیر ترسیمی:



$$v = \frac{ds}{dt} \rightarrow ds = v\,dt \rightarrow \int_{s_1}^{s_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt \Rightarrow s_2 - s_1 = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt$$ } سطح زیر منحنی $v-t$

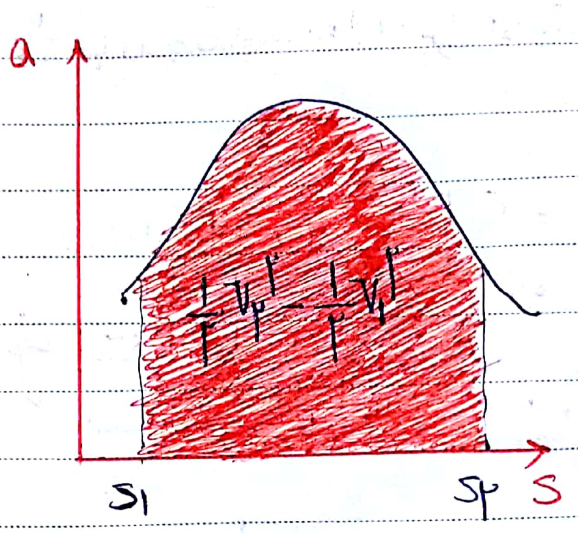
↓ شیب نمودار
شیب خط مماس اگر مماس رسم کنم
بعد بیا و آخر برم جلو اون فاصله
سمت شیب روی داده که در شکل نشان داده شده است.

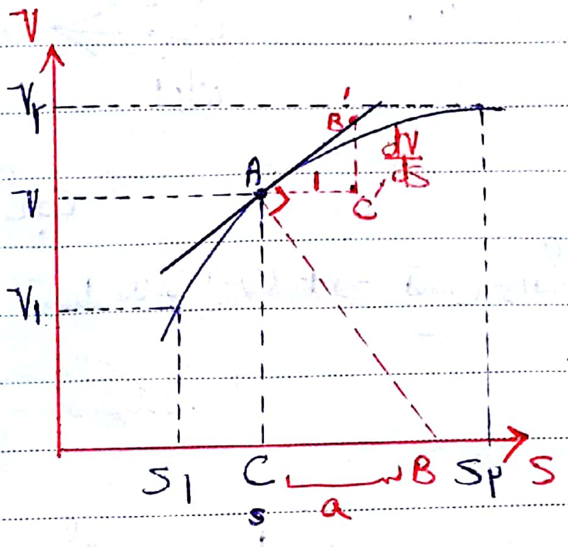
هر ۳ نمودار شرایط سازه را بررسی می کنند.

$$a = \frac{dv}{dt} \rightarrow dv = a\,dt \rightarrow \int_{v_1}^{v_2} dv = \int_{t_1}^{t_2} a\,dt$$

$$\Rightarrow v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} a\,dt$$ } سطح زیر منحنی $a-t$

Scanned by CamScanner





چون دیگر وابستگی زمانی نداریم می‌شه از این رابطه سوم استفاده کرد.

$$ads = vdv \rightarrow \int_{s_1}^{s_2} ads = \int_{v_1}^{v_2} vdv = \int_{v_1}^{v_2} d\left(\frac{1}{2}v^2\right) \Rightarrow \int_{s_1}^{s_2} ads = \frac{1}{2}v_2^2 - \frac{1}{2}v_1^2$$

۲ مثلث ABC و AB'C' متشابه هستند

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{AC'}{AC} \Rightarrow \frac{\frac{dv}{ds}}{BC} = \frac{1}{v}$$

$$\Rightarrow BC = v\frac{dv}{ds} = a$$

نکته: اگر منحنی v-s رو به ما داده بودند و شتاب رو در نقطه ای می‌خواستیم ابتدا مماس در آن نقطه را رسم می‌کنیم سپس آن روی محور افقی خط عمود بر آن مماس رسم می‌کنیم. حال فاصله افقی این نقطه مورد نظر ما و نقطه ای که خط عمود روی محور افقی قطع می‌کند شتاب را به ما می‌دهد.

Scanned by CamScanner

Subject
Date

انتگرال گیری تحلیلی :

اگر $s(t)$ معلوم $\xrightarrow{\text{مشتق}} v(t) \xrightarrow{\text{مشتق}} a(t)$

ولی در غالب موارد $s(t)$ مجهول و $a(t)$ معلوم

درنتیجه $a(t)$ معلوم و $\xrightarrow{\text{انتگرال}} v(t) \xrightarrow{\text{انتگرال}} s(t)$

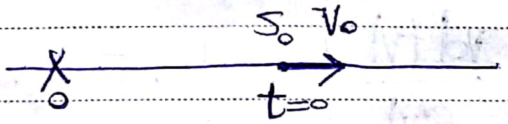
ورودی ———— خروجی

عمومات:

- شتاب ثابت: $a = a$ ثابت
- $a = f(t)$
- $a = f(v)$
- $a = f(s)$

حالت اول : شتاب ثابت ($a = a$ ثابت)

$$t = 0 \rightarrow \begin{cases} s = s_0 \\ v = v_0 \end{cases}$$



(۱) $$a = \frac{dv}{dt} \rightarrow dv = a\,dt \rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a\,dt \rightarrow v - v_0 = at$$

$$\boxed{v = at + v_0}$$

(۲) $$ds = v\,dt = \int_{s_0}^{s} dt = \int_0^t (at + v_0)\,dt \rightarrow \boxed{s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2}$$

PAPCO

(۳) $$v\,dv = a\,ds \rightarrow \int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{s_0}^{s} a\,ds \rightarrow v^2 - v_0^2 = 2a(s - s_0)$$

$$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0)}$$

Scanned by CamScanner

حالت دوم : $a=f(t)$

$$dV = a\,dt \rightarrow \int_{V_0}^{V} dV = \int_0^t f(t)\,dt \rightarrow \boxed{V = V_0 + \int_0^t f(t)\,dt}$$

$$ds = V\,dt \rightarrow \int_{S_0}^{S} ds = \int_0^t V\,dt \rightarrow \boxed{S = S_0 + \int_0^t V(t)\,dt}$$

این $V(t)$ در واقع از خط اول بدست می آید پس در خط اول ما علا
بدست می آوریم که همان $V(t)$ است و در خط دوم جای گذاری می کنیم

حالت سوم : $a=f(V)$

$$a = \frac{dV}{dt} = f(V) \rightarrow \frac{dV}{f(V)} = dt \rightarrow \int_{V_0}^{V} \frac{dV}{f(V)} = \int_0^t dt = t$$

$$\Rightarrow \boxed{t = \int_{V_0}^{V} \frac{dV}{f(V)}}$$

ما $V(t)$ را می خواستیم لذا انتگرال را حل کرده
و بعد $V(t)$ را می کشیم بیرون و همه را می بریم
طرف دیگر چطور $V(t)$ را می شه کشید بیرون؟

$$V\,dV = a\,ds = f(V)\,ds \rightarrow \frac{V}{f(V)}\,dV = ds \rightarrow \int_{V_0}^{V} \frac{V}{f(V)}\,dV = \int_{S_0}^{S} ds = S - S_0$$

$$\rightarrow \boxed{S = S_0 + \int_{V_0}^{V} \frac{V\,d(V)}{f(V)}}$$

این به ما $S(V)$ را می دهد در صورتی که ما
$S(t)$ را می خواهیم پس باید از خط
بالایی $V(t)$ بدست آمده را در این جا جای گذاری کنیم سپس $S(t)$ بدست خواهد
آمد.

پاسخ منفی که بدست آمد

Subject
Date

حالت چهارم : $a=f(s)$

$$vdv = ads = f(s)ds \rightarrow \int_{v_0}^{v} vdv = \int_{s_0}^{s} f(s)ds$$

$$\rightarrow v^2 = v_0^2 + 2\int_{s_0}^{s} f(s)ds \rightarrow \boxed{v = g(s)}$$

منفی ✓

$$v = \frac{ds}{dt} = g(s) \rightarrow \frac{ds}{g(s)} = dt \rightarrow \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{g(s)} = \int_0^t dt = t$$

$$\Rightarrow \boxed{t = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{g(s)}}$$

مثال ۰) $s(t) = 2t^3 - 24t + 6$

الف) زمان لازم برای رسیدن به سرعت $v = 72 m/s$

ب) شتاب ذره هنگامی که $v = 30 m/s$

ج) جابجایی خالص ذره در فاصله زمانی $(t=1s)$ تا $(t=4s)$

مشتق می‌گیریم

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 6t^2 - 24$$

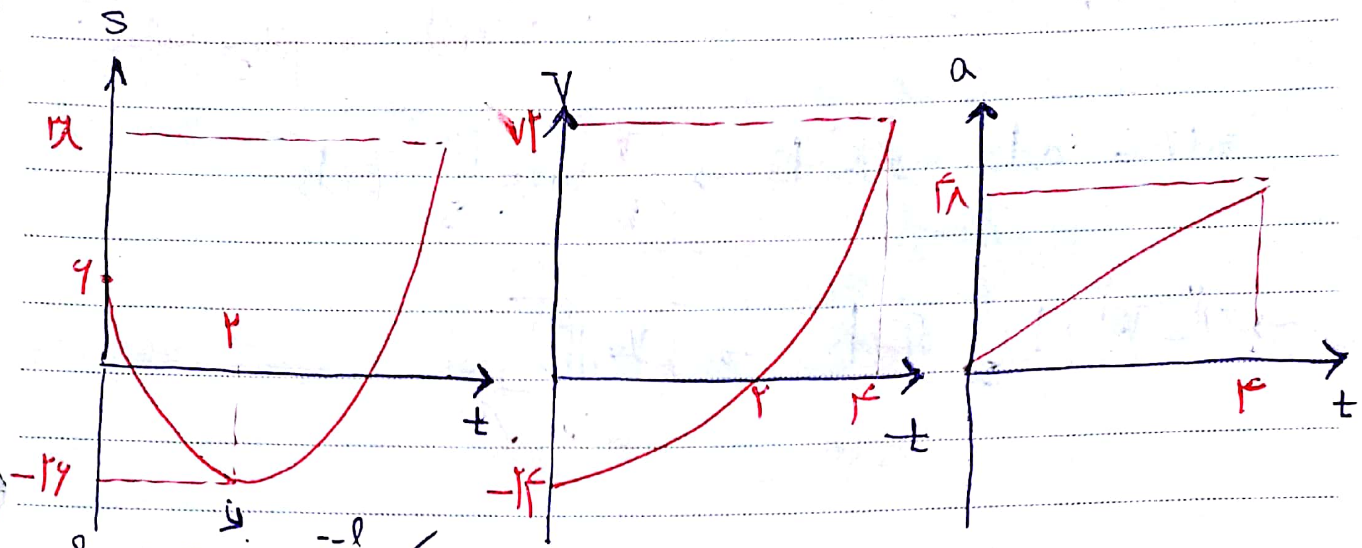
$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 12t$$

الف) $v = 72 \rightarrow 6t^2 - 24 = 72 \rightarrow t^2 = 16 \rightarrow t = \pm 4s$ — فقط مثبت قابل قبول است.

ب) $v = 30 \rightarrow 6t^2 - 24 = 30 \rightarrow t^2 = 9 \rightarrow t = 3 \rightarrow a = 12t = 36 m/s^2$

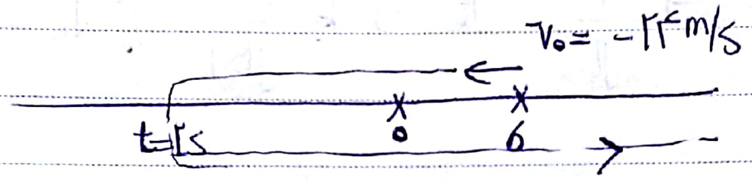
ج) $\Delta(s) = s(4) - s(1) = 54 m$

Scanned by CamScanner



جابجایی مشتق یعنی v صفر است

مهم ✱



مثال) ذره‌ای در $t=0$ در مبدأ قرار دارد سرعت اولیه‌ی $v_0 = 50 m/s$ است و شتاب ذره در ۴ ثانیه اول صفر و بعد از آن $-10 m/s^2$ می‌باشد.

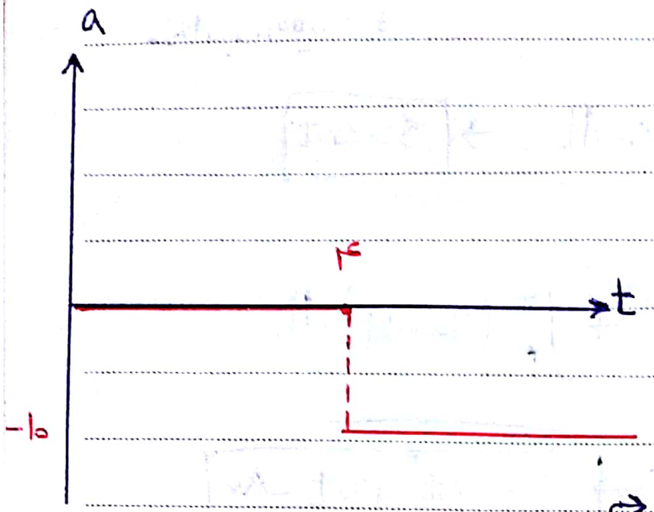
الف) $t = 8, 12 s = ?$ @ x و v

ب) دورترین نقطه‌ای که ذره خواهد رسید (در جهت مثبت)؟

حل در صفحه بعد

محاسبه سرعت 8

$$a(t)=\begin{cases}0 & t\le ۴\\ -۱۰ & t>۴\end{cases}$$



بنابر این ما ۴ انتگرالی ها می‌خوایم برای هر تایی بیشتر از ۴ می‌خواهیم

$t\le ۴$

$$\int_{۵۰}^{v} dv=\int_0^t a\,dt=0 \rightarrow v=۵۰$$

$a=0$

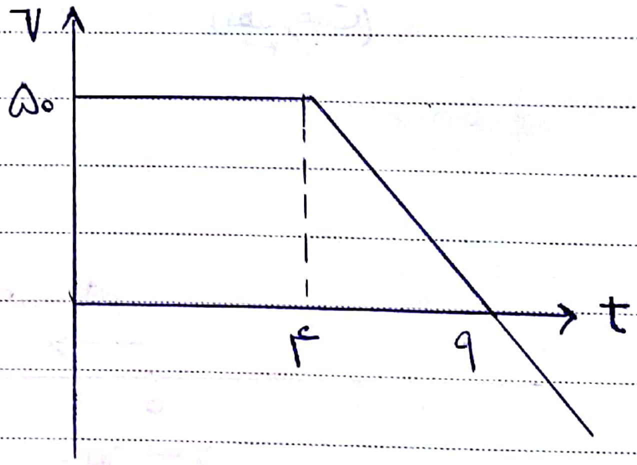
$t>۴$

$$\int_{۵۰}^{v} dv=\int_0^t a\,dt=\int_0^۴ a\,dt+\int_۴^t a\,dt \Rightarrow v-۵۰=-۱۰t\Big|_۴^t$$

$a=-۱۰$

$$v=۹۰-۱۰t$$

$$v(t)=\begin{cases}۵۰ & t\le ۴\\ ۹۰-۱۰t & t>۴\end{cases}$$



$v(۸)=۹۰-۸۰=۱۰\,m/s$

$v(۱۲)=۹۰-۱۲۰=-۳۰\,m/s$

Scanned by CamScanner

$t<4$

$$\int_0^s ds = \int_0^t v\,dt = \int_0^t 50\,dt \Rightarrow \boxed{S = 50t}$$

$t>4$

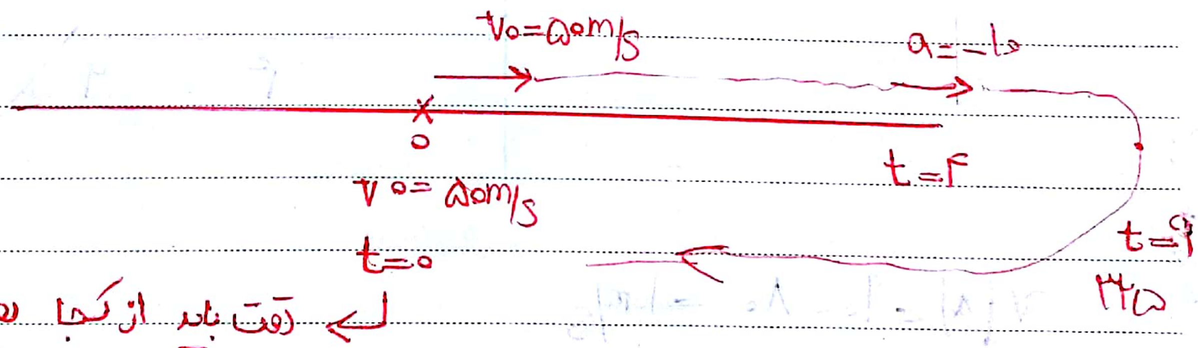
$$\int_0^s ds = \int_0^t v\,dt = \int_0^4 50\,dt + \int_4^t (90-10t)\,dt$$

$$\boxed{S = -5t^2 + 90t - 80}$$

→ $S(8) = 320\,m$

$S(12) = 280\,m$

ب) دورترین محل → $v = 0$ (تغییر جهت) → $90 - 10t = 0$ → $t = 9\,s$ → $S(9) = 325\,m$



← دقت باید از کجا بنویسیم که $t=0$ کجا
است چون $0<4$ پس در رابطه
$t<4$ ، $t=0$ را جای گذاری می کنیم

PAPCO

Scanned by CamScanner

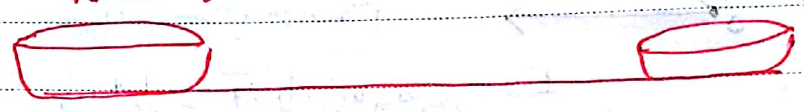
مثال) کشتی با سرعت ۸ گره دریایی در حال حرکت ← موتور خاموش

به علت نیروی امواج و $a=-kv^2$

$\text{گره} = \frac{\text{مایل}}{\text{ساعت}} = \frac{1852\ m}{\text{ساعت}}$

$t=0$, $v_0 = 8$ گره

$t = 10min$, $v = 4$ گره



$$\begin{cases} s(t) \text{ و } v(t) = ? \\ s(t=10min) ? \end{cases}$$

$$\frac{dv}{dt} = a = -kv^2 \rightarrow \int_8^v \frac{-dv}{v^2} = \int_0^t k\,dt$$

$$\rightarrow \frac{1}{v} - \frac{1}{8} = kt \rightarrow \frac{1}{v} = kt + \frac{1}{8} \Rightarrow \boxed{v = \frac{8}{1+8kt}}$$

(۲)

$$\begin{cases} t = 10min = \frac{1}{6}hr \\ v = 4 \end{cases} \rightarrow 4 = \frac{8}{1+8k\frac{1}{6}} \rightarrow k = \frac{3}{4} \qquad \boxed{v = \frac{8}{1+6t}}$$

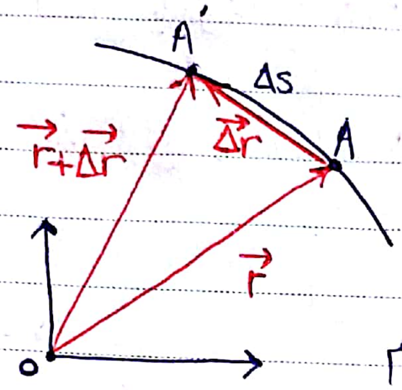
$$\frac{ds}{dt} = v = \frac{8}{1+6t} \rightarrow \int_0^s ds = \int_0^t \frac{8}{1+6t}\,dt \Rightarrow s = \frac{4}{3}\ln(1+6t)$$

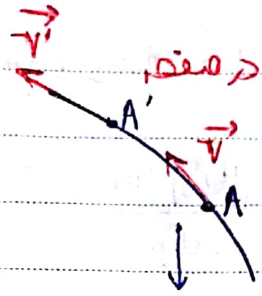
@ $t = \frac{1}{6}hr \rightarrow s = 0.92\,mile$

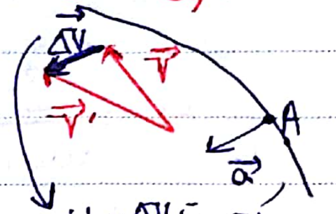
Subject
Date

صفر → خط   منحنی → مستقیم

حرکت منحنی لحظه در صفر







با حفظ جهت و بردار سرعت را متوجه می‌شویم ولی اندازه‌ی آن را نمی‌فهمیم چون فقط راستا و جهت را به ما می‌دهد.

جهت ΔV همان جهت a است.
حالا اگر V' بزرگتر از V باشد شتاب مثبت و اگر V' کوچکتر از V باشد شتاب منفی است. پس شتاب در هر نقطه به سمت داخل انحنا خواهد بود.

$$\vec V_{ave} = \frac{\Delta \vec r}{\Delta t}$$
متوسط

$$\vec V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec r}{\Delta t} = \frac{d\vec r}{dt} = \dot{\vec r}$$
لحظه‌ای

نکته: V مماس بر منحنی مسیر در هر لحظه می‌باشد.

$$\vec a_{ave} = \frac{\Delta \vec V}{\Delta t}$$

$$\vec a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec V}{\Delta t} = \frac{d\vec V}{dt} = \dot{\vec V} = \ddot{\vec r}$$

نکته: $\vec a$ نه مماس و نه عمود بر مسیر می‌باشد (در حالت کلی) ولی به طور قطع به سمت داخل انحنای حرکت خواهد بود.

◦ اگر سرعت ثابت باشد شتاب عمود بر جهت سرعت خواهد بود.

$$V = |\vec V| = \left|\frac{d\vec r}{dt}\right| = \frac{ds}{dt} = \dot s$$

چون دیفرانسیلی است می‌شد باهم Δr و Δs را برابر گرفت چون خیلی کوچک می‌شود.

PAPCO

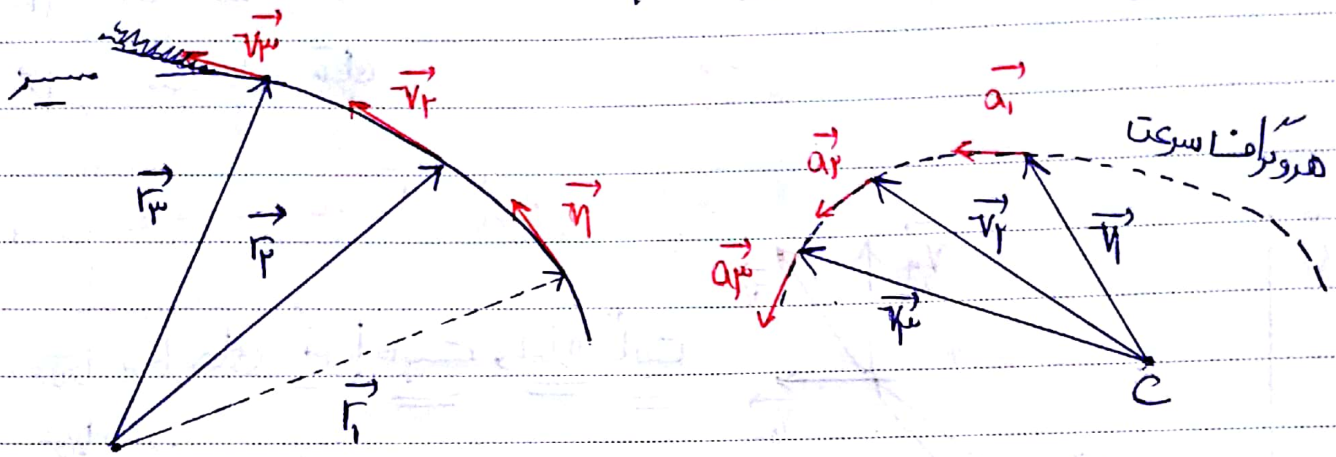
Scanned by CamScanner

Subject
Date

تجسم حرکت :

تجسم سرعت : مماس بر منحنی موقعیت

تجسم شتاب ؟ : منحنی هودوگراف : منحنی ایجاد شده از بردار های سرعت نقاط مختلف وقتی از یک نقطه اختیاری مانند c رسم گردد.



مشتق های برداری :

$$P = P_x \vec{i} + P_y \vec{j} + P_z \vec{k}$$

(۱) $$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{dP_x}{dt}\vec{i} + \frac{dP_y}{dt}\vec{j} + \frac{dP_z}{dt}\vec{k}$$

(۲) $$\frac{d(u\vec{P})}{dt} = \frac{du}{dt}\vec{P} + u\frac{d\vec{P}}{dt}$$

(۳) $$\frac{d}{dt}(\vec{P}\cdot\vec{Q}) = \frac{d\vec{P}}{dt}\cdot\vec{Q} + \vec{P}\cdot\frac{d\vec{Q}}{dt}$$

ضرب داخلی

(۴) $$\frac{d}{dt}(\vec{P}\times\vec{Q}) = \frac{d\vec{P}}{dt}\times\vec{Q} + \vec{P}\times\frac{d\vec{Q}}{dt}$$

ضرب خارجی

Scanned by CamScanner

Subject
Date

تحلیل حرکت در دستگاه مختصات:

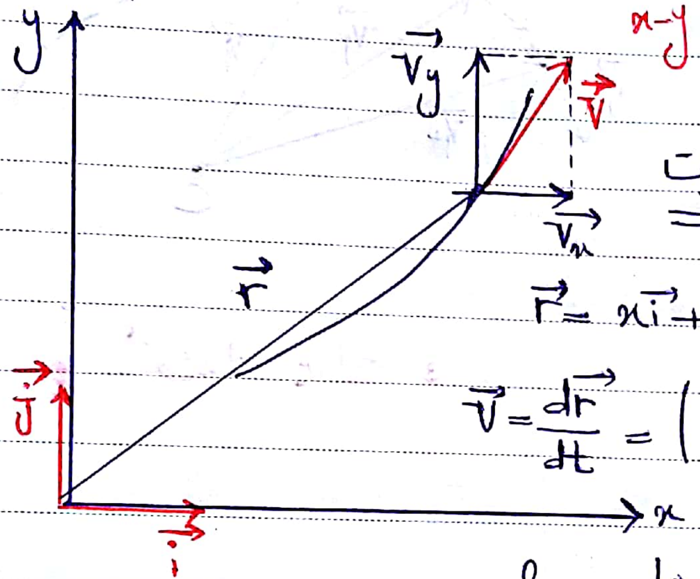
دستگاه های مختصات متداول

۱) مختصات مسطحی (کارتزین) (x-y)

۲) مختصات عمودی - مماسی (t-n)

۳) مختصات قطبی (r-θ)

۱) دستگاه مختصات مسطحی (قائم) x-y



چون بردارهای $\vec i$ و $\vec j$ با جهت و اندازه ثابت می باشند.

$$\vec r = x\vec i + y\vec j$$

$$\vec V = \frac{d\vec r}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\vec i + x\frac{d\vec i}{dt}\right) + \left(\frac{dy}{dt}\vec j + y\frac{d\vec j}{dt}\right)$$

(*) چون هم جهت و هم اندازه ثابته، مشتق زمانی ها صفر می شود.

$$\rightarrow \vec V = \dot x\vec i + \dot y\vec j = \underbrace{V_x\vec i}_{\vec V_x} + \underbrace{V_y\vec j}_{\vec V_y}$$

$$V_x = \dot x \quad V_y = \dot y \quad \Rightarrow V = |\vec V| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{\dot x^2 + \dot y^2}$$

$$\vec a = \frac{d\vec V}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot x\vec i + \dot y\vec j\right) = \ddot x\vec i + \ddot y\vec j = \dot V_x\vec i + \dot V_y\vec j = \underbrace{a_x\vec i}_{\vec a_x} + \underbrace{a_y\vec j}_{\vec a_y}$$

$$a = |\vec a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

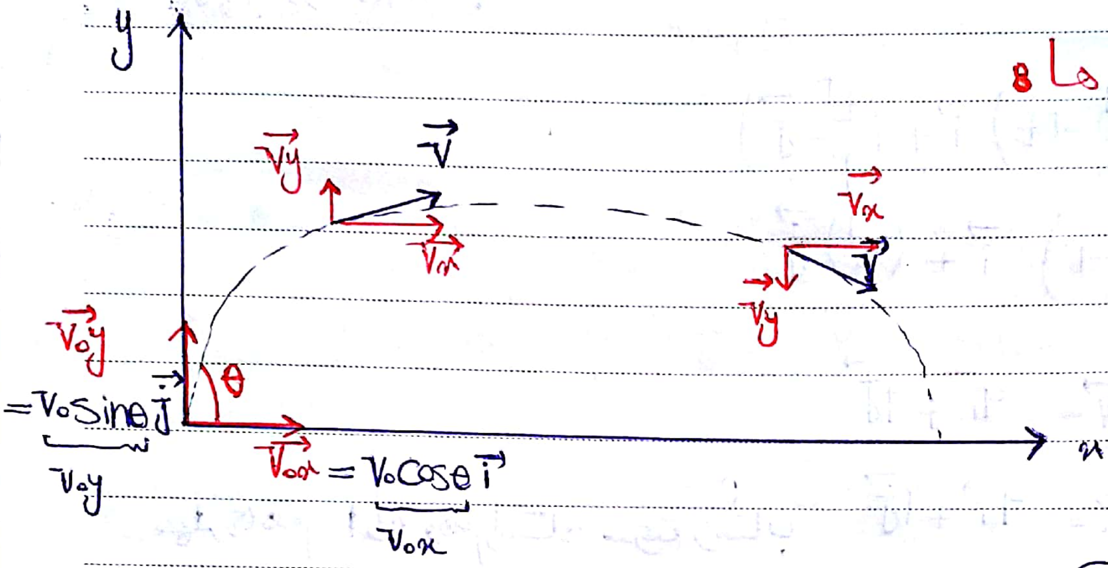
PAPCO

Scanned by CamScanner

نکته : تمامی مطالب بیان شده برای حرکت مستقیم الخط ، می توانند به طور جداگانه در راستای x و y به کار روند.

در حرکت پرتابه ها از این نوع دسته استفاده زیادی می شود.

حرکت پرتابه ها :



$a_x = 0$ و $a_y = -g$

فرض : صرف نظر از (مقاومت هوا)
(انحنا و دوران زمین)
(تغییرات g)

سرعت در راستای x ثابت است

$a_x = 0 \rightarrow V_x = V_{0x} \rightarrow \{ x = V_{0x} t + x_0$

$a_y = -g \rightarrow V_y = -gt + V_{0y} \rightarrow \{ y = -\frac{1}{2} g t^2 + V_{0y} t + y_0$

$\rightarrow V_y^2 = V_{0y}^2 - 2g(y - y_0)$

Scanned by CamScanner

مثال) بردار موقعیت نقطه‌ای در صفحه xy به صورت زیر می‌باشد:

$$\vec{r} = \left(\frac{2}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2\right)\vec{i} + \frac{t^4}{12}\vec{j}$$

$\vec{v}$ و $\vec{a}$ در $t=3s$ ؟

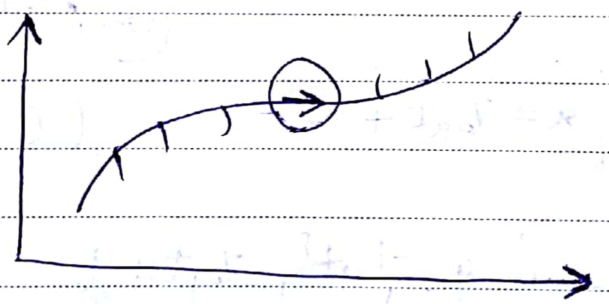
$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = (2t^2 - 3t)\,\vec{i} + \left(\frac{t^3}{3}\right)\vec{j}$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = (4t - 3)\,\vec{i} + (t^2)\,\vec{j}$$

$@\ t=3 \rightarrow \vec{v} = 9\vec{i} + 9\vec{j}$

$@\ t=3 \rightarrow \vec{a} = 9\vec{i} + 9\vec{j}$

چطوری هم اندازه و هم راستای سرعت و شتاب باهم برابرند؟ در نقطه‌ی عطف همچین اتفاقی رخ می‌دهد برای مثال:



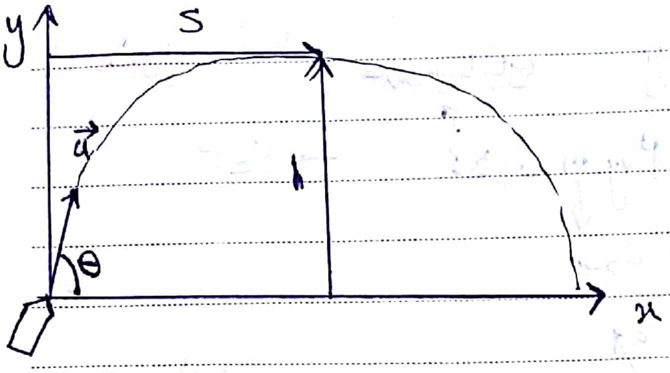
مثال) در لحظه‌ای که سوخت موشک تمام می‌شود دارای سرعت $\vec{u}$ با زاویه θ می‌باشد

- ماکزیمم ارتفاع از آن لحظه به بعد؟ (h)
- فاصله افقی « « « ؟ (s)
- رابطه منحنی حرکت موشک؟ $y=f(x)$

← یعنی زمان رو حذف کنیم، زمان رو یه جوری حذف کنیم از رابطه.

PAPCO

Scanned by CamScanner



• حرکت پرتابه $x = v_{0x}t + x_0 = u\cos\theta\, t \rightarrow v_x = u\cos\theta$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + u\sin\theta\, t \rightarrow v_y = -gt + u\sin\theta$$

نقطه اوج: $v_y = 0 \rightarrow t_1 = \frac{u\sin\theta}{g} \rightarrow y(t_1) = h = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}$

$$x(t_1) = s = \frac{u^2\sin 2\theta}{2g}$$

برای قسمت سوم سوال زمان را ازینجا بدست می آوریم و در دیگری جایگذاری می کنیم.

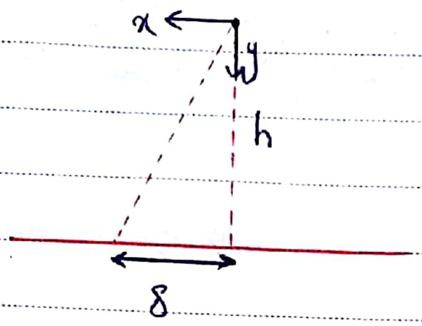
$$x = u\cos\theta\, t \rightarrow t = \frac{x}{u\cos\theta}$$

$$y(t) = y\left(\frac{x}{u\cos\theta}\right) = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2}\sec^2\theta = f(x)$$

بیشترین برد زمانی رخ میدهد که $\theta = 45^\circ$ باشد.

Subject
Date

مثال ۱)



$$\begin{cases} a_y = g \\ a_x = 2 v_y \omega \cos\lambda \end{cases} \rightarrow \delta = ?$$

عرض جغرافیایی (λ) — سرعت چرخشی (ω)

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = g \rightarrow v_y = gt + \cancel{v_{0y}} \Rightarrow v_y = gt \Rightarrow a_x = 2(gt)\,\omega\cos\lambda$$

چون y رو به پایین منفی نمی‌گیره.

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 2g\omega\cos\lambda\, t \rightarrow v_x = \omega g\cos\lambda\, t^2 + \cancel{v_{0x}}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = gt \rightarrow y = +\frac{1}{2}gt^2 + \cancel{y_0}$$

چون دستگاه مختصات روش گذاشتیم.

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \omega g\cos\lambda\, t^2 \rightarrow x = \omega g\cos\lambda\,\frac{t^3}{3} + \cancel{x_0}$$

$$y = h \rightarrow h = \frac{1}{2}gt^2 \rightarrow t^2 = \frac{2h}{g}$$

$$x = \delta = \omega g\cos\lambda\,\frac{1}{3}\,\frac{2h}{g}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,\omega\cos\lambda\; h\sqrt{\frac{h}{g}}$$

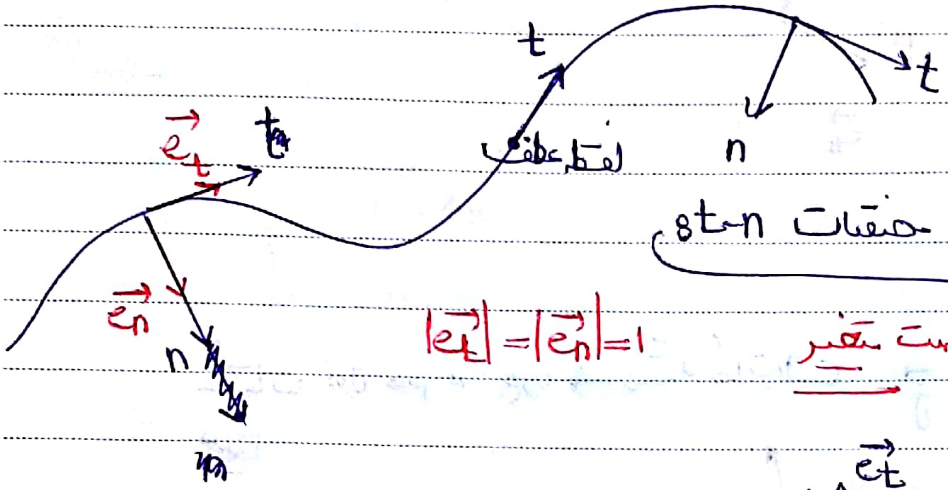
سختی این مسئله این است که ترکیب این مسئله و مسئله قبلی در صورتی که زمین حرکت دورانی داشته باشه و موشک رو رها کنیم بعد فرض می‌کنیم که زمین ثابت و موشک رو به عقب می‌بره و ... (خودت بررسی کن)

PAPCO

Scanned by CamScanner

۲) مختصات عمودی - مماسی (t-n)

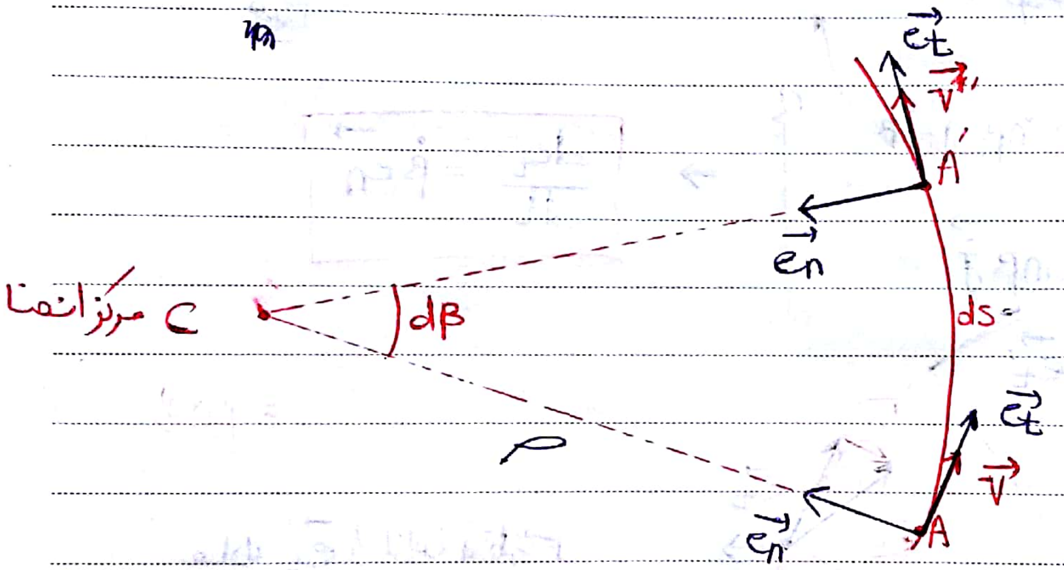
جهت n در جهت تقعر منحنی (سمت انحنا) می باشد



$\vec{e}_n$ و $\vec{e}_t$ بردارهای یکه مختصات t-n :

اندازه ثابت ولی جهت متغیر ← $|\vec{e}_t|=|\vec{e}_n|=1$

محاسبه سرعت :



$$\vec{V}=\frac{ds}{dt}\,\vec{e}_t$$

$$ds=\rho\, d\beta \rightarrow \frac{ds}{dt}=\rho\frac{d\beta}{dt}=\rho\dot{\beta} \rightarrow \boxed{\vec{V}=\rho\dot{\beta}\,\vec{e}_t}$$

V (اندازه سرعت)

$$\rho\dot{\beta}=V \rightarrow \boxed{\vec{V}=V\,\vec{e}_t}$$

محاسبه شتاب :

$$\vec{a}=\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(V\vec{e}_t\right)=\frac{dV}{dt}\,\vec{e}_t+V\,\frac{d\vec{e}_t}{dt}=\dot{V}\vec{e}_t+V\dot{\vec{e}}_t$$

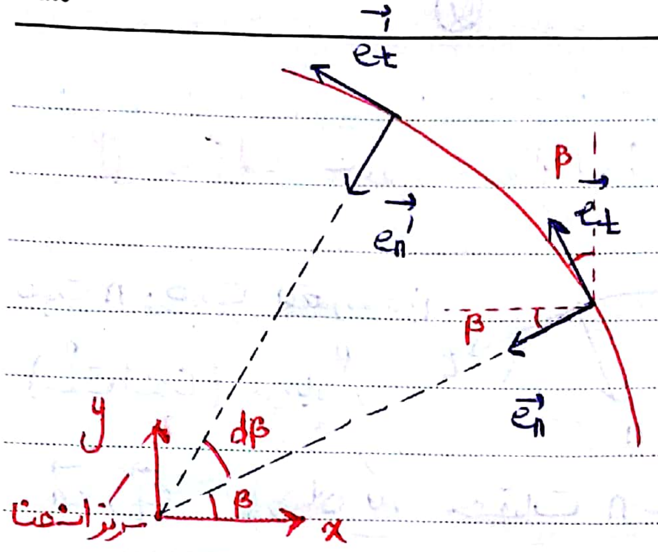
نکته : $\vec{e}_t$ اندازه ثابت ولی جهت متغیر ← $\dot{\vec{e}}_t\neq 0$

PAPCO

Scanned by CamScanner

نقش $\dot{\vec{e}}_t$:

راه اول :



مشتقات اول هم که چون واسه دستگاه دکارتی است نداریم.

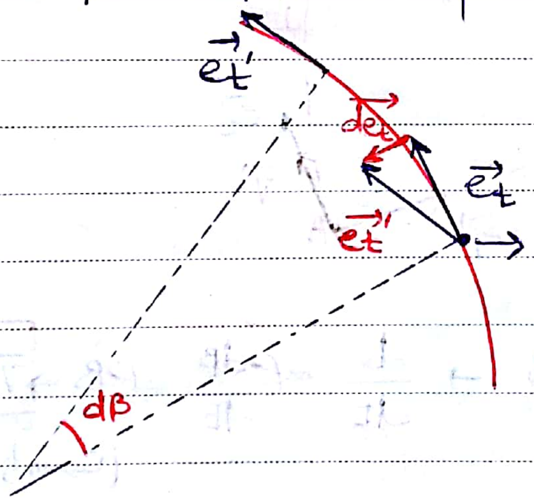
$$\vec{e}_t = -\sin\beta\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j}$$

$$\frac{d\vec{e}_t}{dt} = (-\cos\beta\,\vec{i} - \sin\beta\,\vec{j})\dot{\beta}$$

$$\vec{e}_n = -\cos\beta\,\vec{i} - \sin\beta\,\vec{j}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \dot{\beta}\,\vec{e}_n}$$

راه دوم :



معادله $\vec{e}_t$ را از این نقطه رسم می‌کنیم.

$$d\vec{e}_t = |d\vec{e}_t|\,\vec{e}_n$$

چرا در راستای $\vec{e}_n$ چون اندازه‌های $\vec{e}_t$ و $\vec{e}_t'$ در واقع ← برابر هست و تو کتاب می‌شه گفت که $d\vec{e}_t$ بر $\vec{e}_t$ عموده و در راستای $\vec{e}_n$ است. در واقع می‌شه گفت چون زاویه هم کوچک است پس $|d\vec{e}_t|$ رو می‌شه برابر با اندازه کمان گرفت که هست :

$$|d\vec{e}_t| = |\vec{e}_t|\,d\beta = d\beta \Rightarrow d\vec{e}_t = d\beta\,\vec{e}_n \xRightarrow{\div dt} \boxed{\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \dot{\beta}\,\vec{e}_n}$$

Scanned by CamScanner

محاسبه شتاب :

$$\vec{a} = \dot{v}\vec{e_t} + v\underbrace{\dot{\vec{e_t}}}_{\dot{\beta}\vec{e_n}}$$

$v=\rho\dot{\beta}$

$$\vec{a} = \underbrace{\rho\ddot{\beta}\vec{e_t}}_{\vec{a_t}} + \underbrace{\rho\dot{\beta}^2\vec{e_n}}_{\vec{a_n}}$$

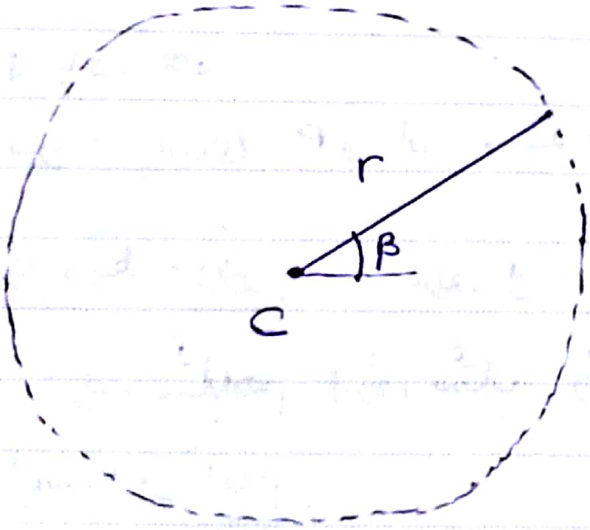
دقت : پس مشتق دوم مکان فقط مولفه مماسی شتاب را ایجاد می کند

در صورتی که در دستگاه کارتزین مشتق دوم مکان کل شتاب را به ما می داد.

$$a_t = \rho\ddot{\beta} = \dot{v} = \ddot{s}$$

$$a_n = \rho\dot{\beta}^2 = v\dot{\beta} = \frac{v^2}{\rho}$$

حالت خاص : حرکت بر روی دایره :



$\rho = r =$ ثابت

$$\vec{v} = \rho\dot{\beta}\vec{e_t} = r\dot{\beta}\vec{e_t}$$

$$\vec{a} = \rho\ddot{\beta}\vec{e_t} + \rho\dot{\beta}^2\vec{e_n} = r\ddot{\beta}\vec{e_t} + r\dot{\beta}^2\vec{e_n}$$

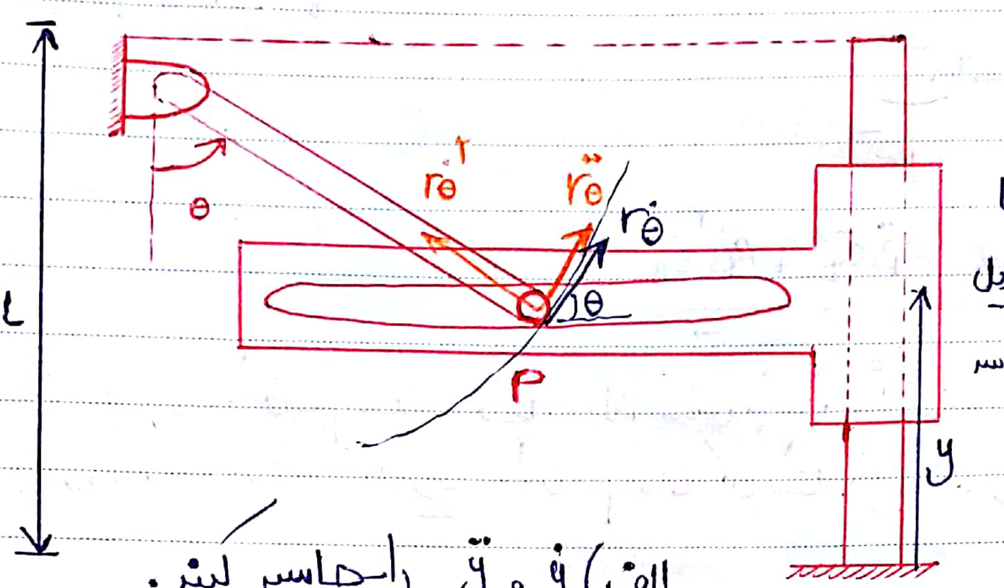
اگر حرکت بر روی دایره با سرعت ثابت (زاویه‌ای) رخ دهد :

$\dot{\beta} = \omega$, $\ddot{\beta} = 0$ $\rightarrow$ $\vec{v} = r\omega\vec{e_t}$, $\vec{a} = r\omega^2\vec{e_n}$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

مثال)



مکانیزم تبدیل دورانی به خطی یعنی ما دورانی‌ها رو داریم می‌خواهیم تبدیل به خطی کنیم حالا واسه دورانی هر چیزی مناسب می‌گوییم مثلاً دستگاه دایره‌ای مناسب است.

الف) $\dot{y}$ و $\ddot{y}$ را محاسبه کنید.

حل با روش هندسی بیرون دستگاه

$$y = L - r\cos\theta \rightarrow \dot{y} = \dot{L} - \dot{r}\cos\theta - r(-\sin\theta\,\dot{\theta})$$

$$r\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\ddot{y} = r\ddot{\theta}\sin\theta + r\dot{\theta}^2\cos\theta$$

حل با دستگاه

سرعت عمودی P و این وسیله هر باهم برابر است. حال اول قطبی دستگاه دایره در نظر می‌گیریم. مولفه y سرعت ما همان مولفه y دستگاه است.

و واسه شتاب هم ۲ مولفه شتاب را می‌کشیم (با رنگ نارنجی) و بعد در راستای y مولفه‌ها را بدست می‌آوریم.

شتاب در صفحه بعد

ب) اگر $\begin{cases} \dot{y} = v_0 = cte \\ \ddot{y} = 0 \end{cases}$ ← برای نقطه P $a_n = ?$ (برحسب v_0 و θ)

$a_t = ?$

حل) طبق الف) $\dot{y} = \dot{r}\sin\theta = v_0 \rightarrow \dot{\theta} = \dfrac{v_0}{r\sin\theta}$

$\ddot{y} = r\ddot{\theta}\sin\theta + r\dot{\theta}^2\cos\theta = 0 \rightarrow \ddot{\theta} = \dfrac{-\dot{\theta}^2\cos\theta}{\sin\theta}$ → جایگزین $\dot{\theta}$

$$\ddot{\theta} = \frac{-v_0^2\cos\theta}{r^2\sin^3\theta}$$

$$a_t = r\ddot{\theta} = \frac{-v_0^2}{r}\,\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}$$

$$a_n = r\dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{r\sin^2\theta}$$

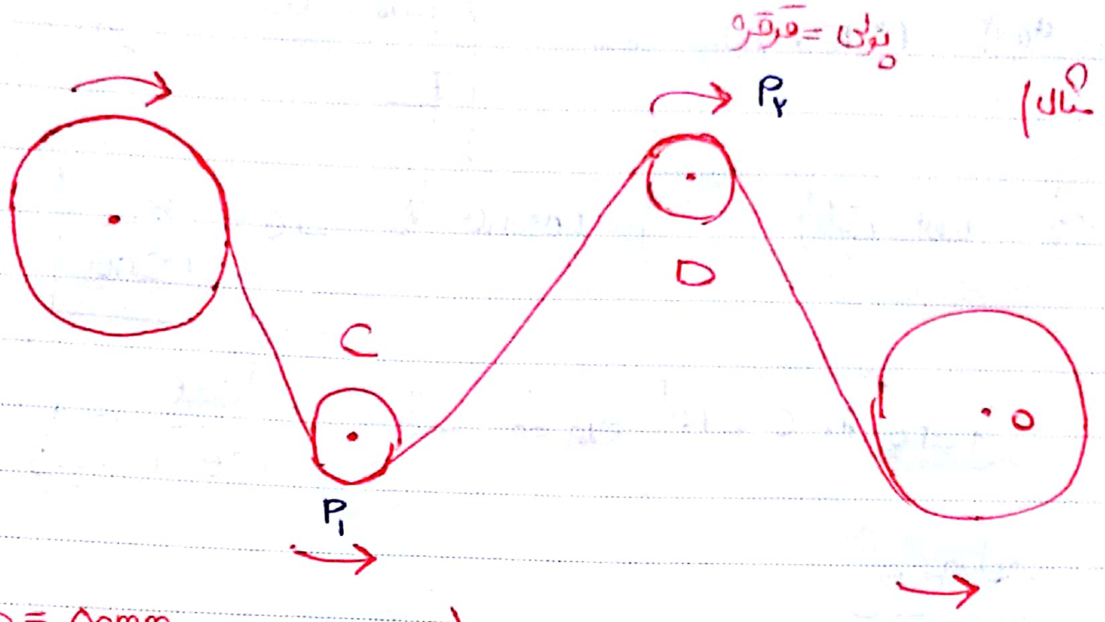
تمرین: چگونه حل مسائل 8

P4PCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

مثال ۱)



$$\begin{cases} r_D = 50\,mm \\ r_C = 100\,mm \end{cases}$$

$a_n)_{P_1} = 40\, m/s^2$

$a_t)_{P_2} = 30\, m/s^2$

$a_{P_1} = ?$
$a_{P_2} = ?$

طرح مسئله و چگونگی حل

a_{P_1}: $a_{P_1 n}$ — $\dot\theta_C\,?$; $a_{P_1 t}$ — $\ddot\theta_C\,?$

a_{P_2}: $a_{P_2 n}$ — $\dot\theta_D\,?$; $a_{P_2 t}$ — $\ddot\theta_D\,?$

$$a_n)_{P_1} = r_C\dot\theta_C^2 \rightarrow 40 = 0.1\,\dot\theta_C^2 \rightarrow \dot\theta_C = 20\, rad/s$$

$$a_t)_{P_2} = r_D\ddot\theta_D \rightarrow 30 = 0.05\,\ddot\theta_D \rightarrow \ddot\theta_D = 600\, rad/s^2$$

تحلیل دستگاهی: چون سرعت در سرتاسر نخ ثابت است پس سرعت تماسی ها باهم برابرند.

تحلیل هندسی در صفحه بعد

Subject
Date

مقدار کشیدگی و فشردگی باهم برابر است . $r_C\theta_C = r_D\theta_D$ هندسی

مشتق → $r_C\dot{\theta}_C = r_D\dot{\theta}_D \rightarrow \dot{\theta}_D = \frac{r_C}{r_D}\dot{\theta}_C = 40\,rad/s$

$v = v$

$r_C\ddot{\theta}_C = r_D\ddot{\theta}_D \rightarrow \ddot{\theta}_C = \frac{r_D}{r_C}\ddot{\theta}_D = 100\,rad/s^2$

$a_t = a_t$

$a_n)_{P_1} = 40\,m/s^2$

$\rightarrow a_{P_1} = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = 50\,m/s^2$

$a_t)_{P_1} = r_C\ddot{\theta}_C = 30\,m/s^2$

$a_n)_{P_2} = r_D\dot{\theta}_D^2 = 80\,m/s^2$

$\rightarrow a_{P_2} = 85{,}4\ m/s^2$

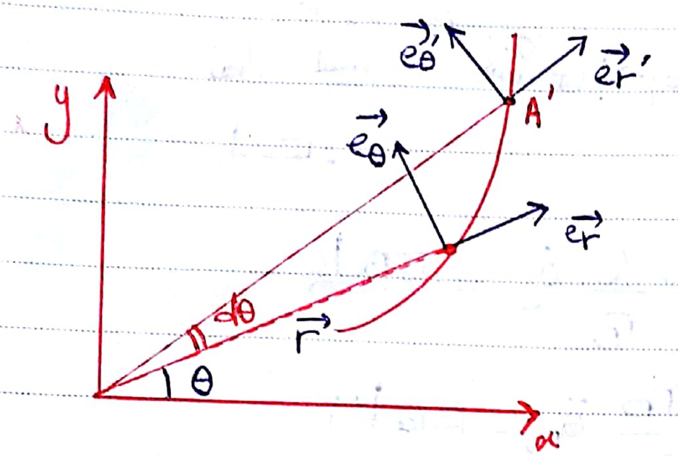
$a_t)_{P_2} = 30\,m/s^2$

(*) دقت شود ، در مجموعه کابل هایی که به هم متصل اند مولفه های مماسی آن ها باهم برابرند

مثلا در هر کابل شتاب های مماسی تمام نقاط باهم برابرند .

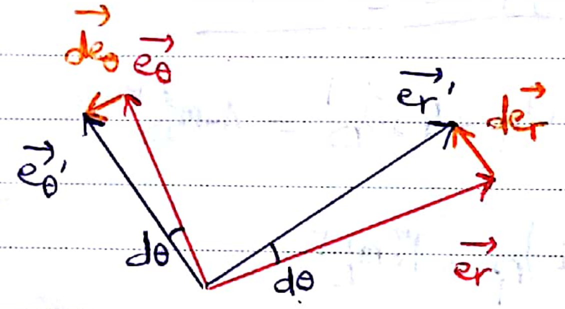
Scanned by CamScanner

۳) دستگاه مختصات $(r-\theta)$



بردار مکان (بردار موقعیت) $\quad \boxed{\vec{r} = r\vec{e_r}}$

بردار سرعت $\quad \vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\vec{e_r} + r\underbrace{\dot{\vec{e_r}}}_{?}$



توضیح: چون $\vec{e_r}$ و $\vec{e_r}'$ هر ۲ یکه هستند پس $d\vec{e_r}$ در واقع کمان است و چون خیلی کوچک است عمود بر $\vec{e_r}$ است. برای $d\vec{e_\theta}$ هم توضیح مشابهی وجود دارد.

$$d\vec{e_r} = |d\vec{e_r}|\,\vec{e_\theta} = d\theta\,\vec{e_\theta} \Rightarrow \boxed{\dot{\vec{e_r}} = \dot{\theta}\vec{e_\theta}}$$

$$d\vec{e_\theta} = |d\vec{e_\theta}|(-\vec{e_r}) = -d\theta\,\vec{e_r} \Rightarrow \boxed{\dot{\vec{e_\theta}} = -\dot{\theta}\vec{e_r}}$$

$$\boxed{\vec{v} = \underbrace{\dot{r}\vec{e_r}}_{\vec{v_r}} + \underbrace{r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}}_{\vec{v_\theta}}}$$

$v_r = |\vec{v_r}| = \dot{r}$

$v_\theta = |\vec{v_\theta}| = r\dot{\theta}$

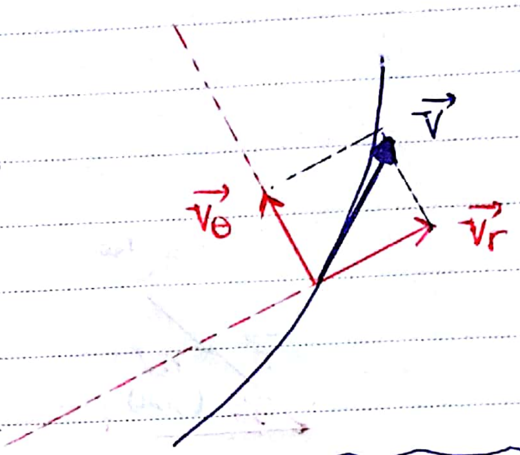
$$\Rightarrow v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

$\vec{v}$ مماس بر مسیر

سرعت کل



بردار شتاب : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta\right) = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\vec{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\vec{e}}_\theta$

$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}\vec{e}_\theta$, $\dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta}\vec{e}_r$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\vec{e}_\theta$$

$\vec{a}_r$, $\vec{a}_\theta$

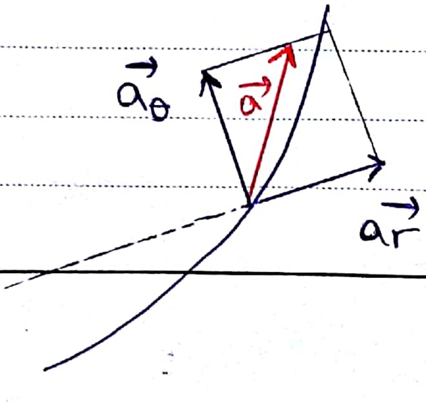
$a_r = |\vec{a}_r| = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$

$\Rightarrow a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = \dots$

$a_\theta = |\vec{a}_\theta| = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)$

$\vec{a}$ به سمت داخل انحنا

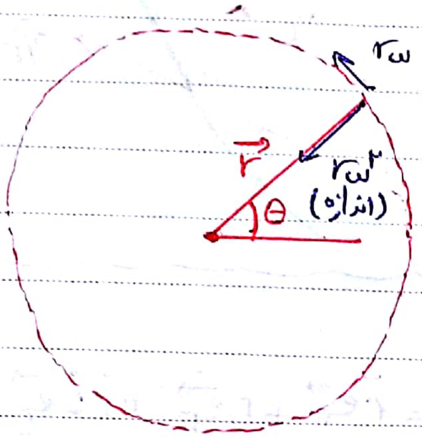
(چون فقط شتاب مرکزگرا است)



P4PCO

Scanned by CamScanner

حالت خاص: حرکت ثابت دایره ای



شعاع دایره ای بودن: $r = cte \rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$

ثابت: $\dot{\theta} = cte = \omega \rightarrow \ddot{\theta} = 0$

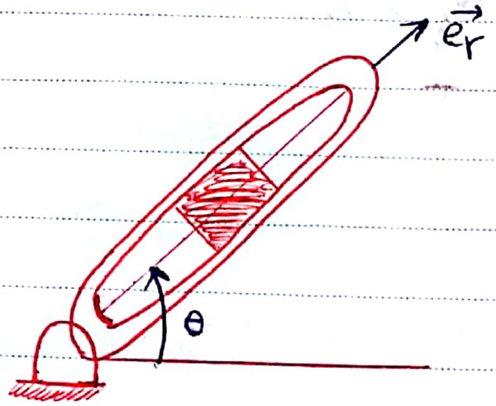
$$\rightarrow \begin{cases} v_r = \dot{r} = 0 \\ v_\theta = r\dot{\theta} = r\omega \end{cases} \qquad \begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -r\omega^2 \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \end{cases}$$

✻ در دستگاه های دورانی یعنی استوانه ای و قطبی با مشتق گیری ترم های بعدی بدست نمی آید چون دستگاه ها ثابت نیستند یعنی اگر $\vec{r}$ داشتیم با مشتق گیری a بدست نمی آید ولی در دستگاه مختصات کارتزین همیشه می شد چون دستگاه ثابت و با مشتق گیری ترمهای بعدی بدست می آیند.

PAPCO

Scanned by CamScanner

مثال) $r = \frac{t^3}{3}$ $\theta = 2\cos\frac{\pi t}{4}$ @ $t = 2s$ $a = ?$ $v = ?$



حل)

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} = t^2 \\ v_\theta = r\dot{\theta} = \frac{t^3}{3}\left(-2\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi t}{4}\right) \end{cases} \xrightarrow{@t=2} \begin{cases} v_r = 4 \\ v_\theta = -\frac{8}{3}\,\frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

$$\rightarrow v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} \quad \ldots$$

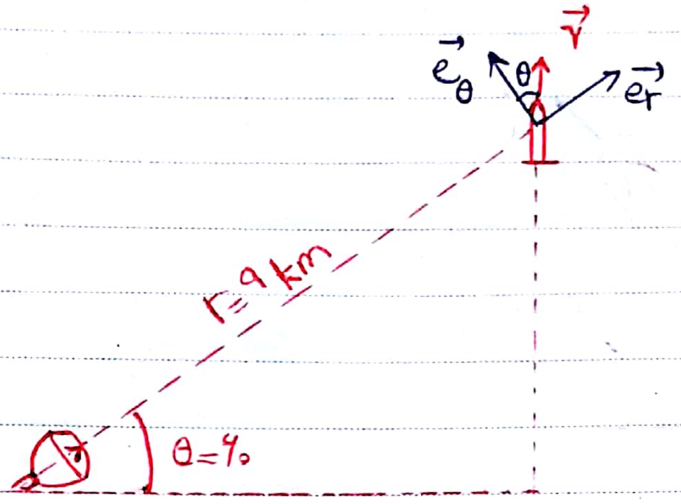
(*) دقت کن واحد v_r و v_θ حتماً m/s است نه وقت rad/s ندارد.

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 2t - \frac{t^3}{3}\left(-\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi t}{4}\right)^2 \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{t^3}{3}\left(\frac{-\pi^2}{18}\cos\frac{\pi t}{4}\right) + 2(t^2)\left(-\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi t}{4}\right) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{@t=2} a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = \ldots$$

Scanned by CamScanner

مثال) فرض کنید موشکی داریم که توسط یک Receiver ترک می‌شود.



$\ddot{r}=21\,m/s^2 \qquad \dot{\theta}=0{,}02\,rad/s \qquad \to v=?\,,\,a=?$

حل) اول اینکه چه دستگاه مختصاتی انتخاب کنیم r و θ چرا چون خودش اطلاعات رو به ما برحسب r و θ داده.

مجهولات : $\dot{r}=?\,,\,\ddot{\theta}=?$

$$\begin{cases} v_r=\dot{r}=? \\ v_\theta=r\dot{\theta}=9000\times 0{,}02=180\,m/s \end{cases}$$

حال می‌دونیم $\vec{v}$ کل قائم است پس مولفه‌های افقی $\vec{e_r}$ و $\vec{e_\theta}$ باید باهم برابر بوده باشند تا یکدیگر را خنثی کنند:

$v_r=v\sin\theta$

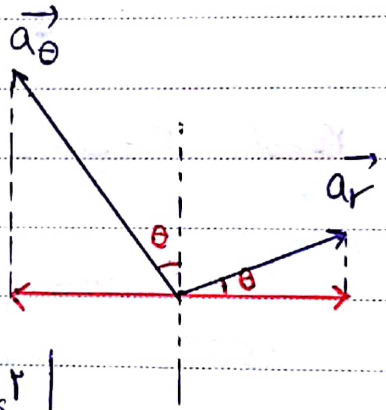
از طرفی $v_\theta=v\cos\theta \to v=\dfrac{v_\theta}{\cos\theta}=\dfrac{180}{\cos\theta}=\dfrac{180}{\cos\frac{\pi}{3}}=360\,m/s$

$\to v_r=v\sin\theta=360\sin\frac{\pi}{3}=180\sqrt{3}=\dot{r}$

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 21 - 9000(0.02)^2 = 17.4 \ m/s^2 \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{cases}$$

حال الان دوباره به مسئله سمت سرعت خودیم ~~حال چون حرکت روشنا~~ را حال شتاب نیز در جهت حرکت روشنا می باشد و چون در راستای قائم حرکت می کند پس مولفه افقی شتاب باید صفر شود.

حرکت روشنا خط مستقیم ⟵ شتاب افقی = ۰



$$a_{\text{افقی}} = a_r \cos\theta - a_\theta \sin\theta = 0$$

$$= 17.4 \cos\frac{\pi}{3} - a_\theta \sin\frac{\pi}{3} = 0 \Rightarrow a_\theta = \frac{17.4}{\sqrt{3}} \ m/s^2$$

با $\ddot{\theta}$ را در جملها ننوشتیم ولی دیگر نمی خواهیم حالا همین طوری بدست می آوریم

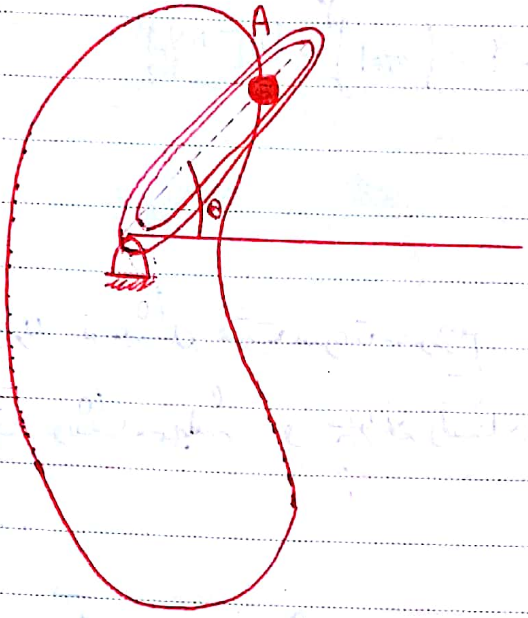
$$\ddot{\theta} = -7.41 \times 10^{-4} \ rad/s^2$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = 20.09 \ m/s^2$$

Subject
Date

(۲۵)

مثال بادامک ۸



$r = b - c\cos\theta$ ثابت b, c

$\dot\theta = \omega = cte \rightarrow a_A = ?$

$\dot\theta = \omega \rightarrow \ddot\theta = 0$

$a_r = \ddot r - r\dot\theta^2$

$a_\theta = r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta$

$r = b - c\cos\theta$ الان r به صورت صریح برحسب t نیست پس باید مشتق جزئی (پاره‌ای) بگیرم ازش.

$\dot r = c\dot\theta\sin\theta = c\omega\sin\theta$

$\ddot r = c\ddot\theta\sin\theta + c\dot\theta^2\cos\theta = c\omega^2\cos\theta$

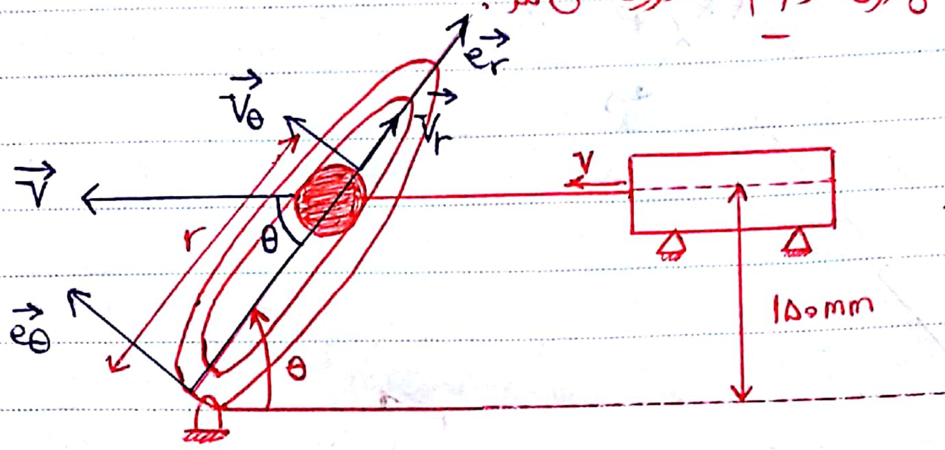
$$\begin{cases} a_r = c\omega^2\cos\theta - (b - c\cos\theta)\omega^2 \\ a_\theta = 2(c\omega\sin\theta)\,\omega \end{cases} \rightarrow a_A = |\vec a_A| = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = \omega^2\sqrt{4c^2 + b^2 - 4bc\cos\theta}$$

← بعد مثلاً میشه دید در کجا ماکس است بعد مشتق بگیریم از این.

Scanned by CamScanner

Subject
Date

مثال) یک ولانرول داریم که دوران می کند.



if $\theta = \frac{\pi}{3}$ $\quad V = 0.9\,m/s = cte$ $\quad$ then $\quad r, \dot r, \ddot r, \dot\theta, \ddot\theta = ?$

برای گوی مورد نظر در مسیر راستی که خطی است و اما مسیر حرکت ما دستگاه قطبی در نظر می‌گیریم.

$$V_r = \dot r = -V\cos\theta = -0.9\cos\frac{\pi}{3} = -0.45\ m/s$$

$$V_\theta = \underset{?}{r}\dot\theta = V\sin\theta \Rightarrow \dot\theta = \frac{0.9\sin\frac{\pi}{3}}{r = 0.173} = \dots\ rad/s$$ → دقت واحد $\dot\theta$، rad/s است.

$$r\sin\frac{\pi}{3} = 0.15 \to r = \frac{0.15\times 2}{\sqrt{3}} = 0.173\,m$$

150mm

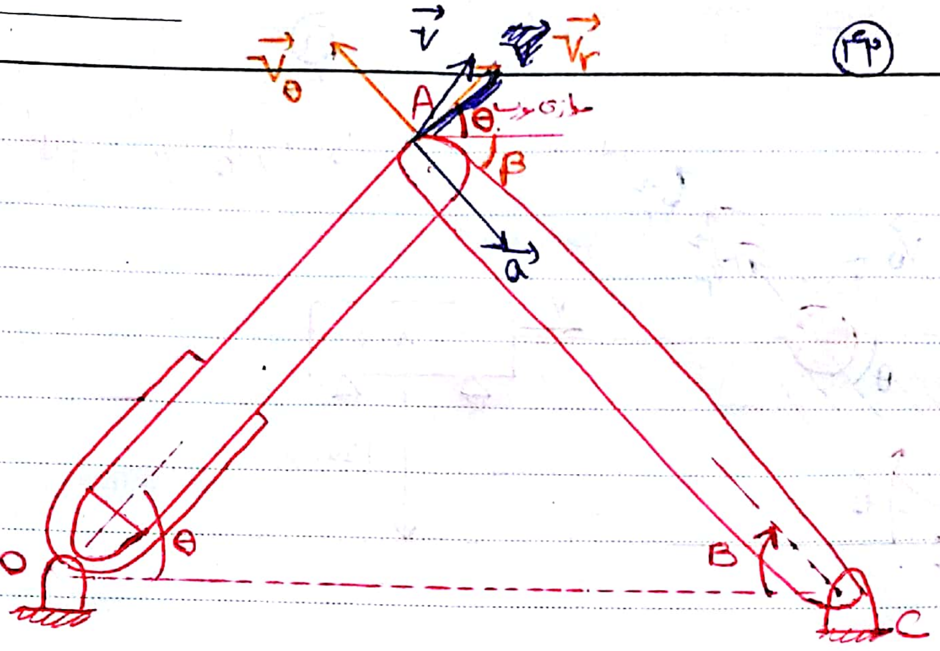
$$a_r = \ddot r - r\dot\theta^2 = 0$$
$$a_\theta = r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta = 0$$

وقتی شتاب در ۲ راستا برهم عمود باشند به هیچ وجه نمی شود همدیگر را خنثی کنند و حتماً برآیندی دارند پس اثر شتاب در راستای افقی صفر باشد در راستای کل صفر باشد پس هم a_r و هم a_θ صفر هستند.

$$a_r = \ddot r - r\dot\theta^2 = 0 \Rightarrow \ddot r = r\dot\theta^2 = \dots\ ✓$$
$$a_\theta = r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta = 0 \Rightarrow \ddot\theta = \frac{-2\dot r\dot\theta}{r} = \dots\ ✓$$

PAPCO

Scanned by CamScanner



$\ddot r, \dot r, \dot\theta, \ddot\theta = ?$

$\dot\beta = ۶۰\, rad/s = cte \qquad \beta = \frac{\pi}{۴} \qquad AC = ۹۰mm \qquad OC = ۳۰۰mm$

الان r و θ ما توانند برای سمت راستی که نمی‌توانند باشند چون ثابت. پس برای سمت چپ r و θ است. حال چون A نقطهٔ مشترک از ۲ طرف سرعت و شتاب را روی آن حساب می‌کنیم باید برابر باشند.

$v_A = AC\dot\beta = ۰/۰۹ \times ۶۰ = ۵/۴\, m/s$

$a_A = \sqrt{\underbrace{(AC\dot\beta^۲)^۲}_{a_n} + \underbrace{(AC\ddot\beta)^۲}_{a_t}} = AC\dot\beta^۲ = ۰/۰۹ \times ۶۰^۲ = ۳۲۴\, m/s^۲$

(a_t: چون $\dot\beta$ ثابت)

ادامه در صفحه بعد

Subject
Date

$$V_r = \dot{r} = V\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta - \theta\right)$$

؟ ؟

$$V_\theta = r\dot{\theta} = V\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta - \theta\right)$$

؟ ؟

واسه r از قضیه cos ها استفاده می‌کنیم.

$$r^2 = AO^2 = 0.3^2 + 0.09^2 - 2(0.3)(0.09)\cos\beta \quad \left(\beta = \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow r = 0.226\,m$$

$$OA\sin\theta = AC\sin\beta \rightarrow \theta = 11.28^\circ$$

$$V_r = V\sin(\beta + \theta) = 3.875\ m/s = \dot{r}$$

$$\dot{\theta} = \frac{V_\theta}{r} = 17.89\ rad/s$$

واسه بدست آوردن $\ddot{r}$ و $\ddot{\theta}$ هم از شتاب‌ها استفاده می‌نماییم در این جا فقط نتایج را می‌نویسیم

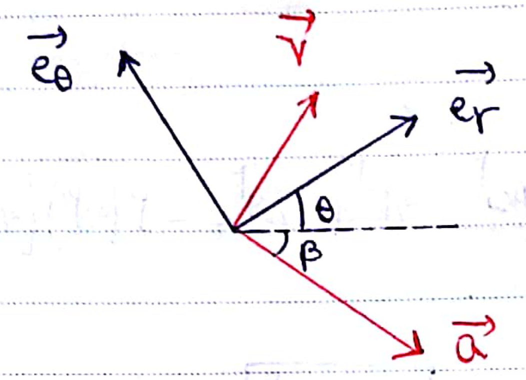
$$a_r = a_A\cos(\beta + \theta) = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \rightarrow \ddot{r} = 325.06\ m/s^2$$

$$a_\theta = -a_A\sin(\beta + \theta) = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \rightarrow \ddot{\theta} = -1515.59\ rad/s^2$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

بازنشانی شکل مثال قبل



$$\begin{cases} v_r = v\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta-\beta\right) \\ v_\theta = v\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta-\beta\right) \\ a_r = a\cos(\theta+\beta) \\ a_\theta = a\sin(\theta+\beta) \end{cases}$$

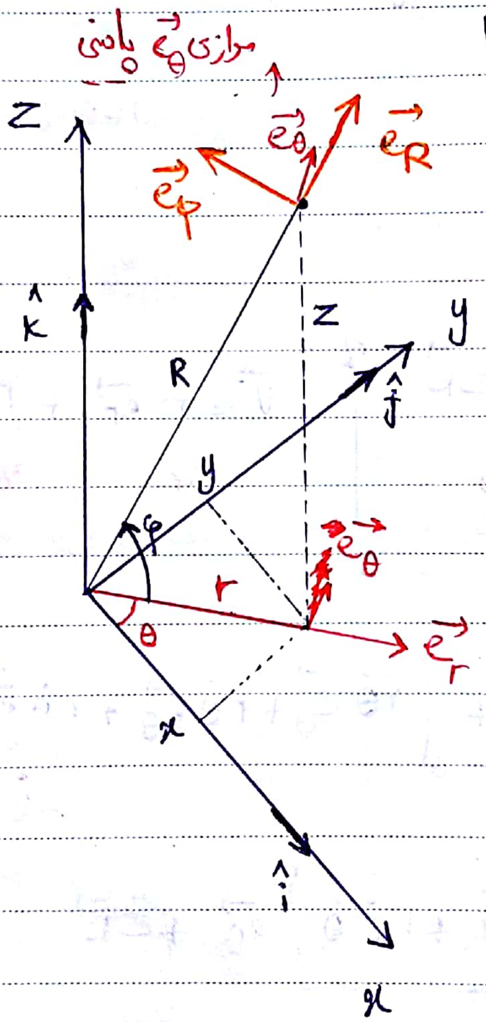
فکر کن چرا سمت راستی با سرعت ثابت می چرخه ولی سمت چپی شتاب داره؟

Scanned by CamScanner

حرکت منحنی الخط در فضا

دستگاه های مختصات

- کارتزین $x-y-z$
- استوانه ای $r-\theta-z$
- کروی $R-\theta-\varphi$



Scanned by CamScanner

Subject
Date

الف) مختصات کارتزین $x-y-z$

$$\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{V} = \dot{\vec{R}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{R}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

ب) مختصات استوانه‌ای $r-\theta-z$

$$R = r\vec{e_r} + z\vec{k}$$

$$V = \dot{\vec{R}} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\vec{e_r}} + \dot{z}\vec{k}$$

?

داشتیم ⊛ $\dot{\vec{e_r}} = \dot{\theta}\vec{e_\theta}$

$$\vec{V} = \underbrace{\dot{r}}_{V_r}\vec{e_r} + \underbrace{r\dot{\theta}}_{V_\theta}\vec{e_\theta} + \underbrace{\dot{z}}_{V_z}\vec{k}$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{V}} = (\ddot{r}\vec{e_r} + \dot{r}\dot{\vec{e_r}}) + (\dot{r}\dot{\theta}\vec{e_\theta} + r\ddot{\theta}\vec{e_\theta} + r\dot{\theta}\underbrace{\dot{\vec{e_\theta}}}_{-\dot{\theta}\vec{e_r}}) + \ddot{z}\vec{k}$$

$$\vec{a} = \underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)}_{a_r}\vec{e_r} + \underbrace{(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})}_{a_\theta}\vec{e_\theta} + \underbrace{\ddot{z}}_{a_z}\vec{k}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

ج) مختصات کروی 8

این رو می‌گوییم روابط $\vec{R} = R\vec{e_r}$

پایینی رو فقط می‌نویسیم چون بدست آوردنشان سخته ولی بلد باش.

$$\dot{\vec{e}}_R = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{e}_\theta$$

$$\dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{e}_R + \dot{\theta}\sin\varphi\,\vec{e}_\varphi$$

$$\dot{e}_\varphi = -\dot{\varphi}\,\vec{e}_R - \dot{\theta}\sin\varphi\,\vec{e}_\theta$$

$$\vec{V} = \dot{\vec{R}} = \dot{R}\vec{e_r} + R\dot{\vec{e}}_R$$

جایگزین

$\dot{\theta}$ داخل $(R\cos\varphi)$

$$\vec{V} = \dot{R}\vec{e}_R + R\dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{e}_\theta + R\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

V_R — V_θ — V_φ

حال واسه شتاب نیز باید از بالایی‌ها مشتق گرفت ولی چون نتیجه اش طولانی می‌شه فقط حاصل رو می‌نویسیم.

$$\vec{a} = a_R\vec{e}_R + a_\theta\vec{e}_\theta + a_\varphi\vec{e}_\varphi$$

$$a_R = \ddot{R} - R\dot{\varphi}^2 - R\dot{\theta}^2\cos^2\varphi$$

$$a_\theta = \frac{\cos\varphi}{R}\frac{d}{dt}\left(R^2\dot{\theta}\right) - 2R\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\varphi$$

$$a_\varphi = \frac{1}{R}\frac{d}{dt}\left(R^2\dot{\varphi}\right) + R\dot{\theta}^2\sin\varphi\cos\varphi$$

PAPCO

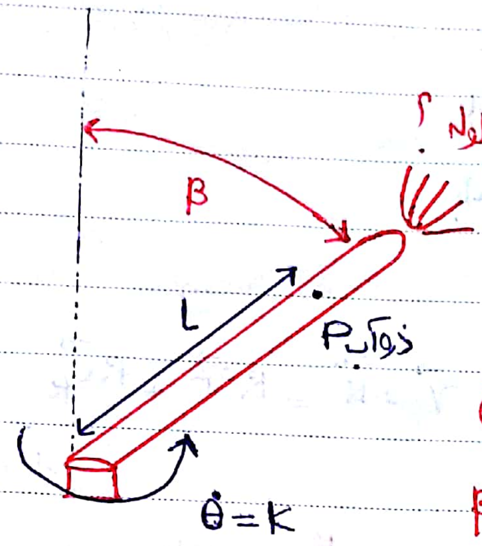
Scanned by CamScanner

Subject
Date

مثال) فواره آب پاش

سرعت و شتاب ذره P در موقعیت L در داخل لوله؟

a   v



$\dot{L}=C=cte$

$\dot{\theta}=K=cte$

$\beta=cte$

در حالت کلی می توانیم β هم داشته باشیم یعنی بالا و پایین هم برود ولی در این جریان داده شده.

حل) چون β ثابت یعنی دستگاه مختصات کروی به درد ما نمی خورد ولی باز هم می شد با هاش حل کرد ولی ما در این دستگاه مختصات استوانه ای انتخاب می کنیم.

$$\begin{cases} v_r=\dot{r} \xrightarrow{I} \dot{L}\sin\beta=C\sin\beta \\ v_\theta=r\dot{\theta} \leftarrow \text{فقط این را داریم} = LK\sin\beta \\ v_z=\dot{z} \xrightarrow{II} \dot{L}\cos\beta=C\cos\beta \end{cases}$$

مختصات استوانه ای:

$$\Rightarrow v^2=v_r^2+v_\theta^2+v_z^2 \rightarrow v=\sqrt{C^2+L^2K^2\sin^2\beta}$$

تصویر در صفحه افق

$r=L\sin\beta \rightarrow \dot{r}=\dot{L}\sin\beta+L\dot{\beta}\cos\beta$ (I)

$z=L\cos\beta \rightarrow \dot{z}=\dot{L}\cos\beta-L\dot{\beta}\sin\beta$ (II)

(با $\dot{\beta}=0$)

حالا برای شتاب هم این مراحل را تکرار می کنیم.

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

ادامه حل :

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \rightarrow = -r\dot{\theta}^2 = -l\sin\beta\, k^2$

$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$ (اتحاد) $\rightarrow = 2\dot{r}\dot{\theta} = 2\dot{l}\sin\beta\, k = 2c\sin\beta\, k$

$a_z = \ddot{z} \rightarrow = 0$

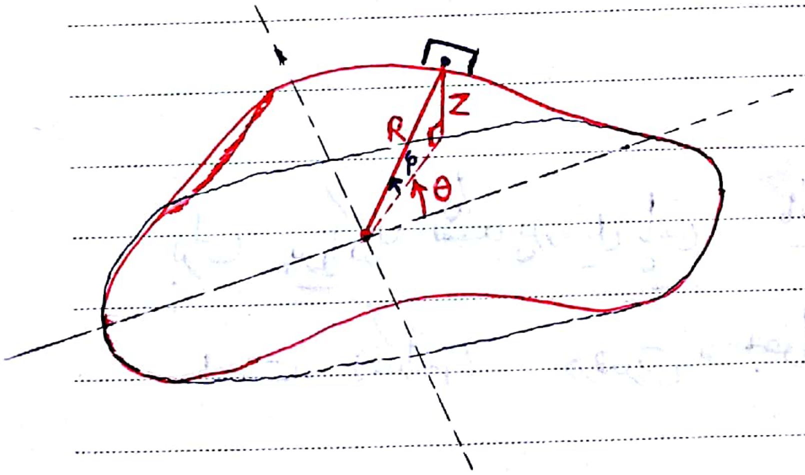
از صفحه ی قبل $\dot{r}$ را داریم حال مشتق از $\dot{r}$، $\ddot{r}$ را به ما می دهد.
" " " $\dot{z}$ " " " " " " $\dot{z}$ ، $\ddot{z}$ " " " " .

$\dot{r} = \dot{l}\sin\beta + l\dot{\beta}\cos\beta \rightarrow \ddot{r} = \ddot{l}\sin\beta + \dot{l}\dot{\beta}\cos\beta$

$\dot{z} = \dot{l}\cos\beta - l\dot{\beta}\sin\beta \rightarrow \ddot{z} = \ddot{l}\cos\beta - \dot{l}\dot{\beta}\sin\beta$

$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2 + a_z^2} = k\sin\beta\sqrt{l^2k^2 + 4c^2}$

مثال) وسیله شهربازی (اسپرتم)



$z = \frac{h}{2}(1 - \cos 2\theta)$

$\dot{\theta} = \omega = cte$

$R = cte$

@ $\theta = \frac{\pi}{4}$ $v = ?$ (بر حسب ω, R, h)

P4PCO

Subject
Date

(۵۰)

حل) الان دیگر صفحات کروی در نظر می گیریم چرا چون که بالا و پایین مهره قطار ما و زاویه φ تغییر پیدا می کند.

$$\begin{cases} v_R = \dot{R} \\ v_\theta = R\dot{\theta}\cos\varphi \\ v_\varphi = R\dot{\varphi} \,? \end{cases}$$

ماکزیمم بالا پایین $\Rightarrow$ $\dot{R} = 0$

(I) $R\omega\sqrt{1-\frac{h^2}{4R^2}}$

(II) $h\omega \frac{1}{\sqrt{1-\frac{h^2}{4R^2}}}$

$$\sin\varphi = \frac{z}{R} = \frac{h}{2R}(1-\cos 2\theta) \xrightarrow{@\,\theta=\frac{\pi}{4}} \sin\varphi = \frac{h}{2R} \rightarrow \cos\varphi = \sqrt{1-\frac{h^2}{4R^2}} \quad \text{(I)}$$

مشتق زمانی $\dot{\varphi}\cos\varphi = \frac{h}{2R}(2\dot{\theta}\sin 2\theta) \rightarrow \dot{\varphi} = \frac{h}{R}\dot{\theta}\frac{\sin 2\theta}{\cos\varphi} \xrightarrow{@\,\theta=\frac{\pi}{4}}$ (I)

$$\dot{\varphi} = \frac{h}{R}\,\omega\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{h^2}{4R^2}}} \quad \text{(II)}$$

برای پیدا کردن شتاب پروفیل پایینی باید r را بدست آوریم که در صفحه افقی است. (فشرانفر) درستی که بخواهیم.

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

حرکت نسبی : (Relative Motion)

اگر توصیف حرکت ذره نسبت به محورهای مرجع ثابت بررسی گردد ← حرکت مطلق

" " " " " " متحرک " " ← حرکت نسبی

: اگر حرکت مطلق دستگاه متحرک مشخص باشد ← حرکت مطلق ذره ✓

انتخاب سیستم مختصات مرجع (ثابت) :

- کاربردهای مهندسی روی زمین ← مختصات مرجع روی زمین (از حرکت زمین صرف‌نظر می‌شود)
- حرکت ماهواره‌ای ← مختصات مرجع در مرکز زمین و ثابت در نظر گرفته می‌شود. اگر در سطح زمین بگیری دوران زمین هم لحاظ می‌شود.
- حرکت بین سیاره‌ای ← مختصات مرجع در مرکز خورشید و ثابت در نظر گرفته می‌شود.

ما در این درس فقط از اولی استفاده می‌کنیم.

دستگاه مختصات متحرک نسبت به ثابت :

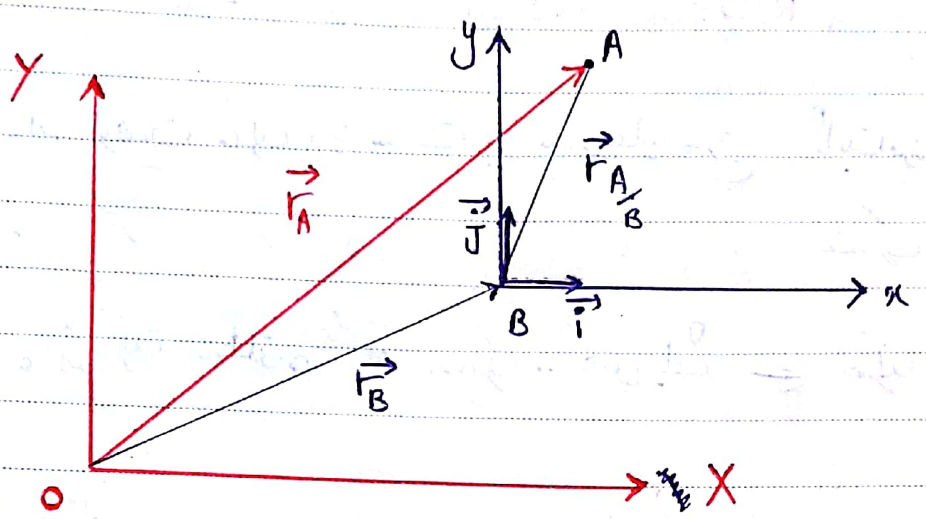
(یعنی دستگاه ثابت روی زمین و یه دستگاه متحرک داری)

- حرکت انتقالی → این فصل
- حرکت دورانی
- هردو

PAPCO

Scanned by CamScanner

تماس برداری:



$$\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{r}_{A/B} \qquad \vec{r}_{A/B} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

وسرعت

$$\dot{\vec{r}}_A = \dot{\vec{r}}_B + \dot{\vec{r}}_{A/B} \quad \text{یا} \quad \vec{V}_A = \vec{V}_B + \vec{V}_{A/B} \qquad \dot{r}_{A/B} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}$$

الف $\dot{\vec{i}}$ و $\dot{\vec{j}}$ صفرهستند چرا چون دوران نکرده و در همون راستاهای قبلی دستگاه مختصات جهت ما باقی مانده. درواقع به دلیل حرکت انتقالی $\dot{\vec{i}}$ و $\dot{\vec{j}}$ نداریم.

شتاب:

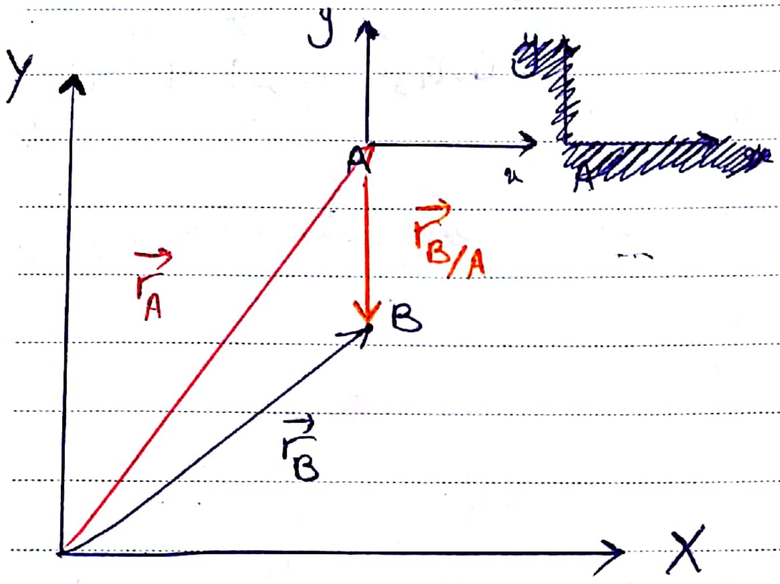
$$\ddot{\vec{r}}_A = \ddot{\vec{r}}_B + \ddot{\vec{r}}_{A/B} \quad \text{یا} \quad \vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B} \qquad \ddot{\vec{r}}_{A/B} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}$$

به طور کلی: $V_{A/B}$ سرعت A نسبت به B : سرعت A از دید ناظر ایستاده در دستگاه مختصات B (x-y)

$a_{A/B}$ شتاب A نسبت به B : شتاب A 〃 〃 〃 〃 〃 〃

Scanned by CamScanner

نکته: انتخاب دستگاه مختصات، اختیاری است.



$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{r}_{B/A}$$
$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$$
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$$

$\Rightarrow$

$$\vec{r}_{B/A} = -\vec{r}_{A/B}$$
$$\vec{v}_{B/A} = -\vec{v}_{A/B}$$
$$\vec{a}_{B/A} = -\vec{a}_{A/B}$$

آیا این ها فقط برای حرکت انتقالی صادق اند؟ بعداً گفته می‌شود.

طبق صفحه متحرک B

نکته: اگر دستگاه مختصات متحرک دارای سرعت ثابت باشد، آنگاه شتاب ذره نسبت به دستگاه متحرک برابر خواهد بود با شتاب مطلق ذره نسبت به دستگاه مرجع ثابت

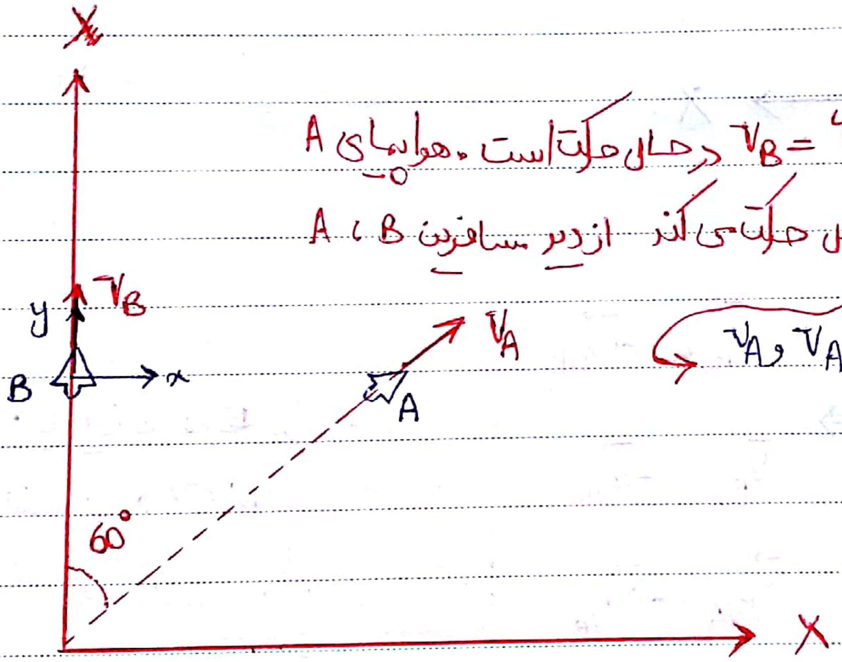
طبق صفحه متحرک $\vec{a}_{A/B}$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B^{\,0} + a_{A/B}$$

گفتم سرعت ثابت

نتیجه آنکه در تحلیل شتاب (قانون دوم نیوتن) به جای دستگاه مرجع ثابت می‌توان از دستگاه مرجع متحرک با سرعت ثابت استفاده نمود. این دستگاه را **دستگاه اینرسی** می‌نامند.

- در جلسه قبل داشتیم حرکت نسبی انتقالی را بررسی می‌کردیم.



مثال) یک هواپیمای $v_B = 400\,km/h$ در حال حرکت است. هواپیمای A با زاویه ۶۰ درجه مطابق شکل حرکت می‌کند. از دید مسافرین B ، A در جهت شرق حرکت می‌کند؟ v_A و $v_{A/B} = ?$

چون فقط از دید مسافران هواپیمای B ، A داره رو به شرق حرکت می‌کند دستگاه متحرک خود را روی B می‌گذاریم.

PAPCO
Scanned by CamScanner

حل) v_A و $v_{A/B} = ?$

$\vec{v}_B = 400\vec{j}$ $\qquad$ $\vec{v}_{A/B} = \overset{?}{v}_{A/B}\,\vec{i}$

این بردار یعنی $\vec{j}$ ماله مطلق است $\qquad$ این بردار ماله دستگاه نسبی است.

$\vec{v}_A = \overset{?}{v}_A \sin\frac{\pi}{3}\,\vec{i} + \overset{?}{v}_A \cos\frac{\pi}{3}\,\vec{j}$

این بردارها هم مطلق هستند.

حالا زمانی می‌توان برابر قرار داد و بردارهای مطلق و نسبی را یکی و برابر در نظر گرفت که ۲ دستگاه نسبت به هم چرخش نداشته باشند.

$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B} \Rightarrow v_A \sin\frac{\pi}{3}\,\vec{i} + v_A \cos\frac{\pi}{3}\,\vec{j} = 400\vec{j} + v_{A/B}\,\vec{i}$

$v_{A/B} = v_A \sin\frac{\pi}{3} \rightarrow v_{A/B} = 1200 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1039\ km/h$

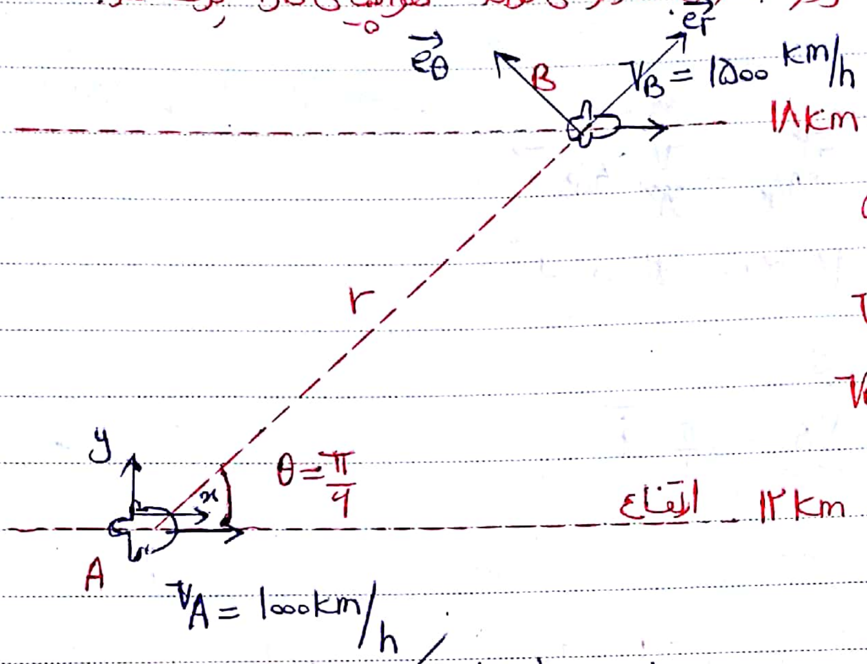
$400 = v_A \cos\frac{\pi}{3} \rightarrow v_A = 1200\ km/h$

BARCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

مثال) هواپیمای A به تجهیزات رادار جستجوی پیشرو می تواند هواپیمای B را ترک کند.



$a_A = -1{,}2\ m/s$
$V_A = 1000\ km/h$
$V_B = 1500\ km/h = cte$
$\ddot{r}, \ddot{\theta} = ?$

چون A روی B را track می کند

دستگاه خود را روی A می گیریم پس باید B را نسبت به A بدست آوریم.

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A} \Rightarrow \frac{1500}{3{,}6}\vec{i} = \frac{1000}{3{,}6}\vec{i} + \vec{V}_{B/A} \Rightarrow \vec{V}_{B/A} = 138{,}9\vec{i}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} \Rightarrow 0 = -1{,}2\vec{i} + \vec{a}_{B/A} \Rightarrow \vec{a}_{B/A} = 1{,}2\vec{i}$$

حال دستگاه قطبی هم در نظر می گیریم تا بتوان $\ddot{r}$ و $\ddot{\theta}$ را بدست آورد.

$$(V_{B/A})_r = V_{B/A}\cos\theta = \dot{r} \rightarrow \dot{r} = 138{,}9\cos\frac{\pi}{4} = 120\ m/s$$

$$(V_{B/A})_\theta = -V_{B/A}\sin\theta = r\dot{\theta} \rightarrow r = \frac{6000}{\sin\frac{\pi}{4}} \rightarrow \dot{\theta} = \frac{-138{,}9\sin\frac{\pi}{4}}{12000} = -5{,}79\times10^{-3}\ rad/s$$

(18km − 12km)

$$(a_{B/A})_r = a_{B/A}\cos\theta = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \rightarrow \ddot{r} = -0{,}437\ m/s^2$$

$$(a_{B/A})_\theta = -a_{B/A}\sin\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \rightarrow \ddot{\theta} = 1{,}66\times10^{-4}\ rad/s^2$$

Scanned by CamScanner

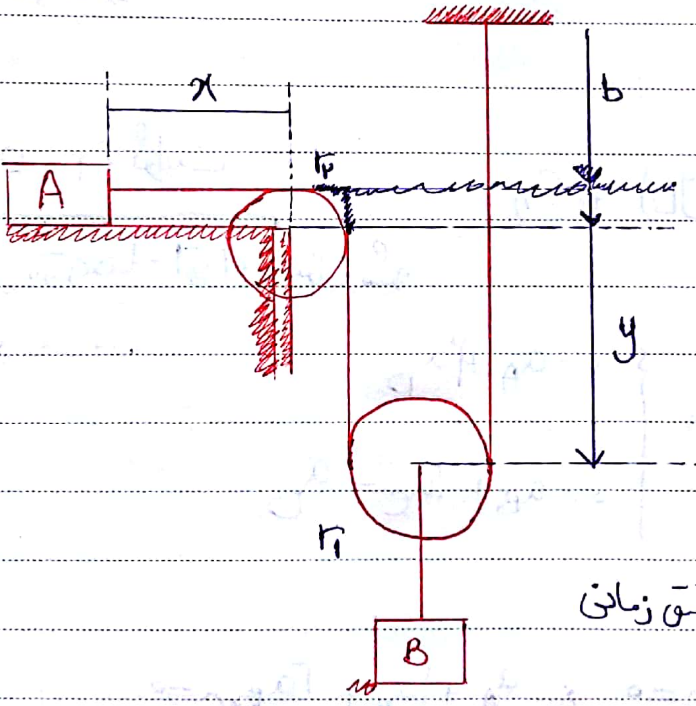
علامت سرعت‌ها را یعنی $\dot{r}$ و $\dot{\theta}$ را می‌توان طبق شکل ۱۵ مشخص کرد به این گونه که

سرعت یکی با سرعت دیگری شتاب دارد پس r دارد زیاد می‌شود و θ کم و علامت $\dot{r}$ و $\dot{\theta}$ را می‌توان

طبق شکل ۱۵ تفسیر کرد.

حرکت مقید ذرات وابسته به هم:

حرکت ذرات:
- بیرون مقید ← فصل بعد
- مقید ← ✓



سیستم یک درجه آزادی:

طول کل کابل:

$$L = b + y + \pi r_1 + y + \frac{\pi r_2}{2} + x$$

$$x + 2y = L - \left(b + \pi r_1 + \frac{\pi r_2}{2}\right)$$

ثابت

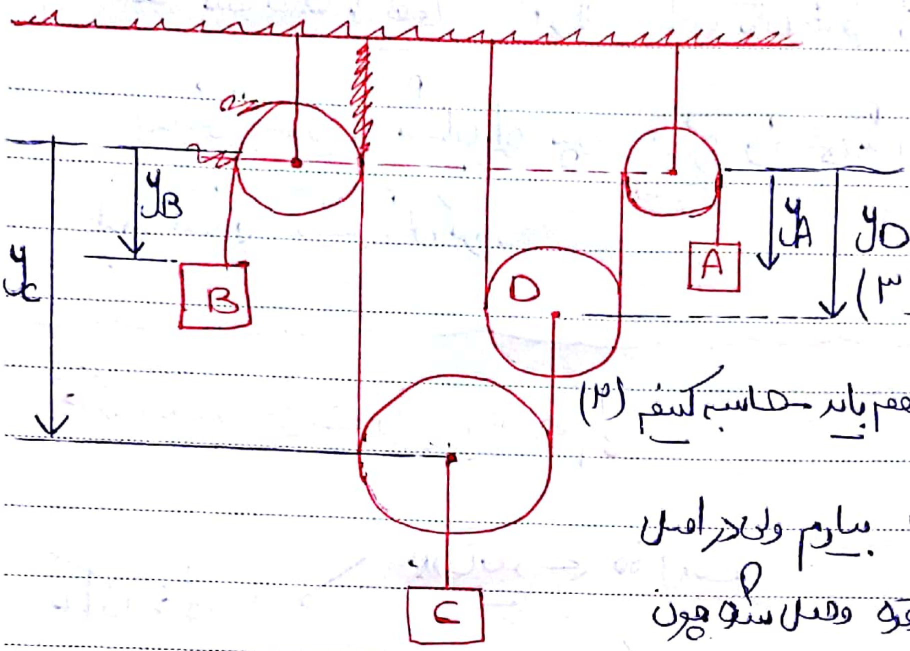
مشتق زمانی
$$\begin{cases} \dot{x} + 2\dot{y} = 0 \\ \ddot{x} + 2\ddot{y} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_A + 2v_B = 0 \\ a_A + 2a_B = 0 \end{cases}$$

- سرعت A دارای جهت مخالف با سرعت B می‌باشد.
- معادلات قیدی برای حرکت در هر ۲ جهت برقرار است.

PAPCO

سیستم ۱ درجه آزادی: حرکت یکی مشخص باشد، حرکت سیستم (کل) مشخص است.

مثال)



سطح اولیه را این جا می گیریم چون اون فاصله بالایی ها ثابته.

طول ذرات تغییری نکنه (۳)

طول قرقره های متحرک را هم باید حساب کنم (۴)

پس ۵-۵ تا طول باید بدست بیارم ولی در اصل ۲ تاست چون ذره C به خود قرقره وصل شده چون مرکز قرقره هر چقدر جابجا شه C هم همانقدر جابجا می شود.

۲ تا طول طناب داریم.

$$\begin{cases} L_A = y_A + 2y_D + c_1 \\ L_B = y_B + y_C + (y_C - y_D) + c_2 \end{cases}$$

c_1 و c_2 ثوابت

دور قرقره ها - ارتفاع آویزان شده

مشتق زمانی

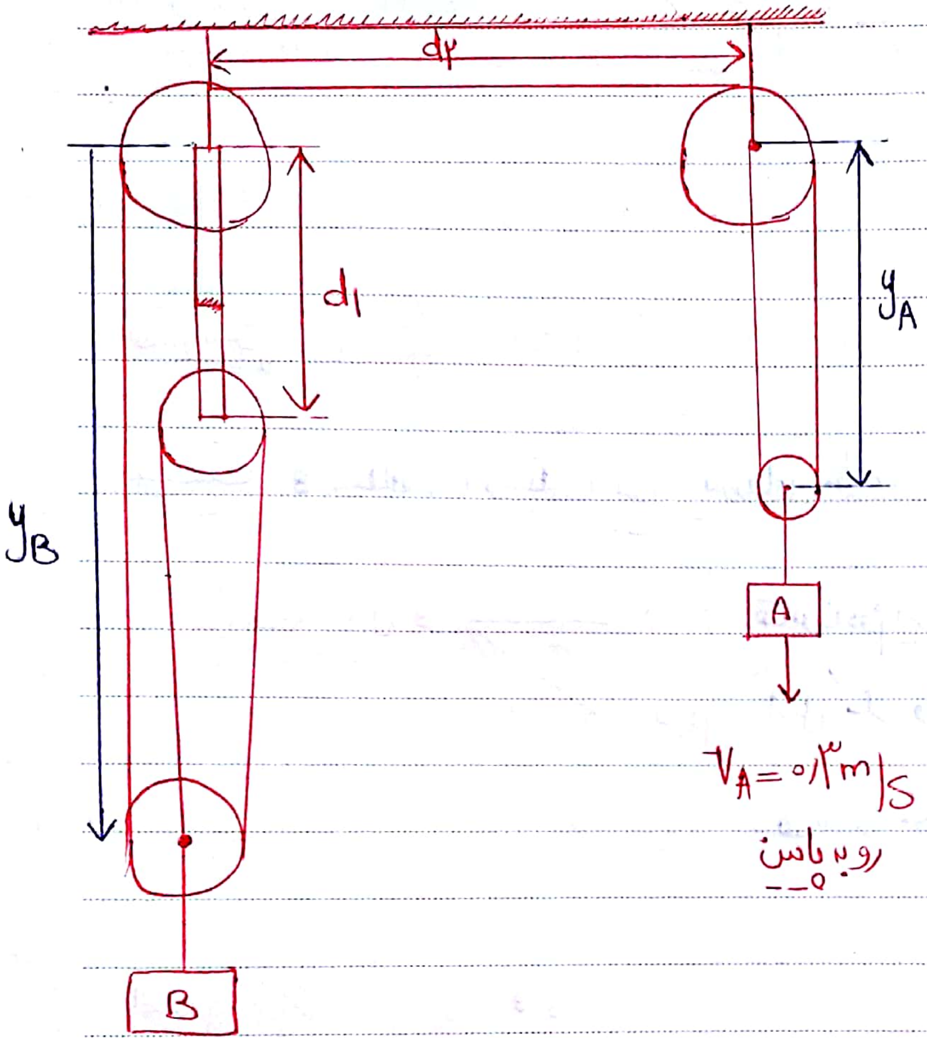
$$\begin{cases} 0 = v_A + 2v_D \\ 0 = v_B + 2v_C - v_D \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 = a_A + 2a_D \\ 0 = a_B + 2a_C - a_D \end{cases}$$

حذف v_D از ۲ معادله →

$$v_A + 2v_B + 4v_C = 0 \quad , \quad a_A + 2a_B + 4a_C = 0$$

چون در واقع هم وزنه مسئل وصل شت

نکته: سیستم ۲ درجه آزادی است ← برای تعیین حرکت کل سیستم، حرکت ۲ جزء باید مشخص باشد. طبق معادله آخر هم می شه فهمید. به روش دیگر می توان فهمید هم این است که اگر یکی را عقب کنی دیگری هم عقب می شود یعنی اگر یکی را قفل کردی و دیگری حرکت نکند ۱ درجه آزادی است ولی اگر یکی را گرفتی و حرکت کرد دیگری ۲ درجه آزادی است



$V_B = ?$

$L = ۲y_A + d_۲ + y_B + ۲(y_B - d_۱) - = C$

و

Scanned by CamScanner

حذف فرقوه‌های متحرک در آخر ← { هرقوو متحرکها / هرقوو } → قرقره‌ها → حرکت مقید — یادآوری

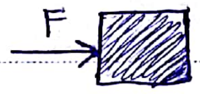
فصل سوم سینتیک ذرات

سینتیک : مطالعه‌ی رابطه‌ی بین نیروهای متوازن نشده و تغییرات حرکت ناشی از این نیروها

روش های حل :
- الف) قانون دوم نیوتن
- ب) اصل کار و انرژی
- ج) ضربه و مومنتم (اندازه حرکت)

الف) قانون دوم نیوتن :

آزمایش : جسم رو تحت اثر نیروهای مختلف قرار می‌دهند و می‌آثر ببینند که شتاب جسم چقدر است.



⇜ شتاب = ?

$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \dots = \frac{F_n}{a_n} = C \quad \text{ثابت}$$

C : خاصیتی از ماده است که تغییر نمی‌پذیرد = اینرسی = مقاومت در برابر تغییر حرکت یا تغییر سرعت

P4PCO

Scanned by CamScanner

به طور کلی در سیستم‌هایی که ما بررسی می‌کنیم :

ثابت [illegible] مثبت ← $C = Km$ و به طور کلی

$\rightarrow F = kma$

نکات :

- K یک ثابت است برای انتخاب سیستم آحاد مورد نظر
- جهت نیرو و شتاب یکسان است ← $\vec{F} = m\vec{a}$
- شتاب در دستگاه مختصات اینرسی اندازه گیری می‌شود. (شتاب مطلق)
- برای دستگاه SI مقدار K برابر ۱ است $K=1$ یعنی $F=ma$.

سیستم آحاد :

SI

$F = 1^N$ → [$m = 1kg$] $K=1$

$a = 1 m/s^2$

آمریکایی

$F = 1 lbf$ → [$m = 1 slug$] $K=1$

پوند ←

$a = 1 ft/sec^2$

انگلیسی

$F = 1 lbf$ → [$m = 1 lbm$] $K \neq 1 ,\ K = \frac{1}{32.2}$

$a = 32.2\ ft/sec^2$

PAPCO

Scanned by CamScanner

معادله حرکت و حل مسائل :

ذره‌ای به جرم m تحت تأثیر نیروهای همرس F_1 و F_2 و ... قرار گرفته است.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

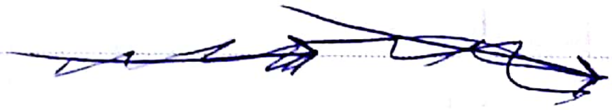
معادله حرکت، مقدار شتاب آنی متناظر با مقادیر لحظه‌ای نیروهای وارده
نقش می‌نماید. (می‌گویند قانون دوم نیوتن لحظه‌ای است و در لحظه می‌تواند متغیر باشد)

حرکت ذره:
- ۱ بعدی ← حرکت روی خط راست
- ۲ بعدی ← x-y ، r-θ ، t-n
- ۳ بعدی ← x-y-z ، r-θ-z ، r-θ-φ

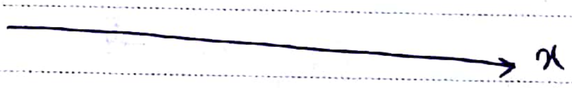
نکته: اولین گام در نوشتن معادله حرکت، ترسیم Free diagram یا دیاگرام آزاد سیستم می‌باشد.

حرکت مستقیم الخط :

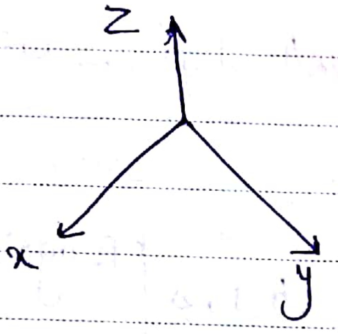
گاهی وقت‌ها این حرکت مستقیم الخط در یک بعد صورت می‌گیرد گاهی هم در ۲ بعد یا ۳ بعد



در صفحه بعد



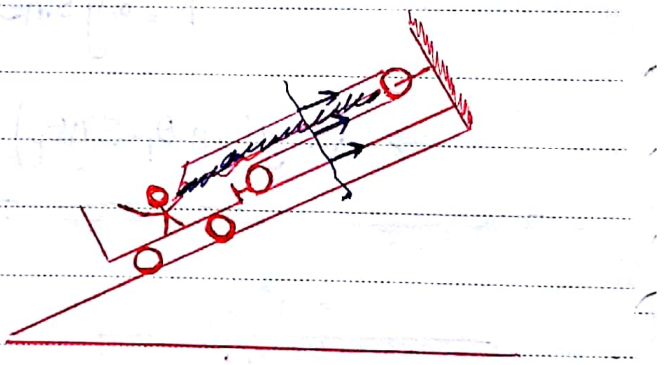
$$\begin{cases} \sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases}$$

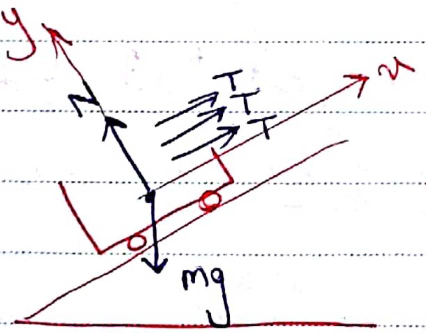


$$\begin{cases} \sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y \\ \sum F_z = ma_z \end{cases} \qquad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

مثال. عدم وجود اصطکاک

جرم = 100 kg
T کشش طناب = ۲۵۰ N
a = ?





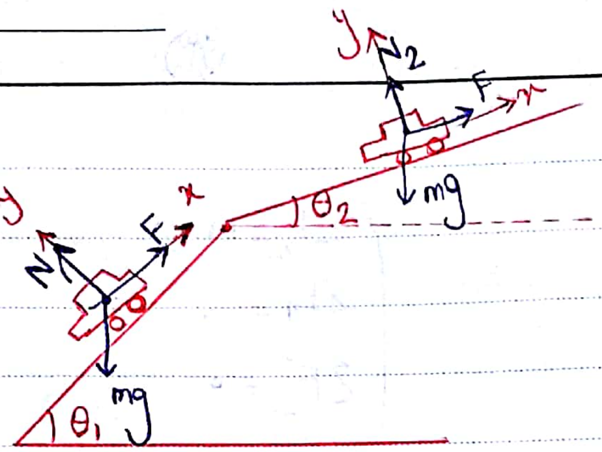
$$\begin{cases} \sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3T - mg\sin\theta = ma \\ N - mg\cos\theta = 0 \end{cases}$$

$a = 2{,}97\ m/s^2$

Scanned by CamScanner

Subject
Date

۶۴



مثال) ماشینی با سرعت ثابت v از شیبی با زاویه θ_1 بالا می‌رود.

- در نقطه A شیب θ_2 می‌شود.
- شتاب بعد از گذر از A بدون تغییر میزان گازدادن؟

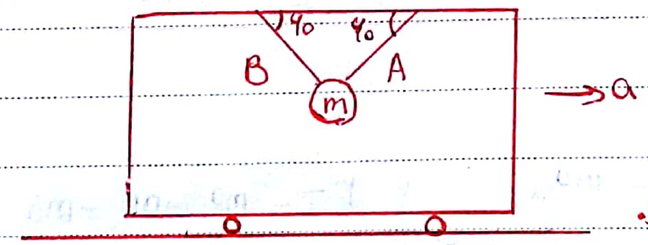
حل) قبل از A
$$F - mg\sin\theta_1 = ma \quad (a=0)$$
$$N_1 - mg\cos\theta_1 = 0$$

بعد از A
$$F - mg\sin\theta_2 = ma$$
$$N_2 - mg\cos\theta_2 = 0$$

(I)

$$F = mg\sin\theta_1 \xrightarrow{\text{جاگذاری}} mg\sin\theta_1 - mg\sin\theta_2 = ma$$

$$\Rightarrow a = g(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)$$

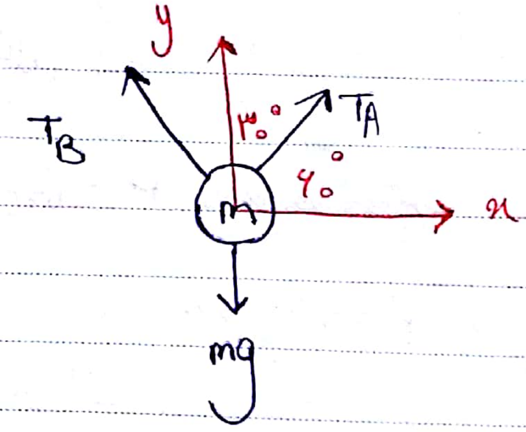


مثال) گوی فولادی در تاب شتاب‌دار توسط ۲ طناب A و B آویخته شده است. a را چنان تعیین کنید که T_A ۲ برابر T_B باشد.

P4PCO

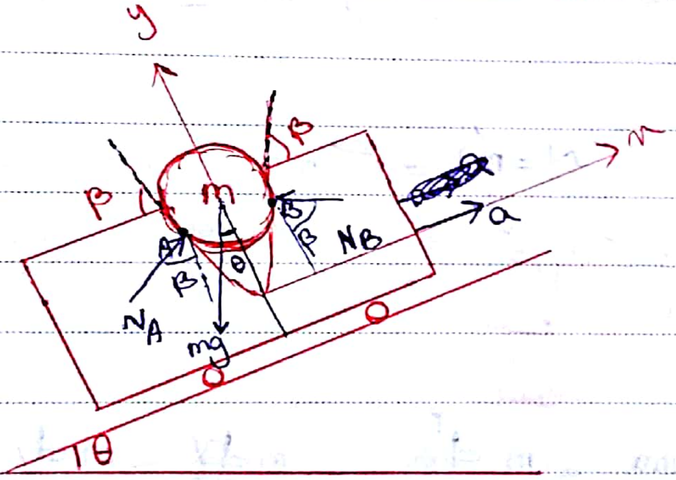
Scanned by CamScanner

حل) رسم دیاگرام آزاد



$$\begin{cases}\sum F_x = ma \\ \sum F_y = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_A \sin 30 - T_B \sin 30 = ma \\ T_A \cos 30 + T_B \cos 30 - mg = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{g}{3\sqrt{3}}$$

$T_A = 2T_B$



فرض کنید سطح شیبداری دارد.

$\begin{cases}\theta = 30° \\ \beta = 45°\end{cases}$

جرم m در حالت سکون

حداکثر a چقدر باشد تا گوی

از نقطه B جدا نشود.

$x:\ N_A \sin\beta - N_B \sin\beta - mg\sin\theta = ma$

$y:\ N_A \cos\beta + N_B \cos\beta - mg\cos\theta = 0$

$a = 0{,}366g$

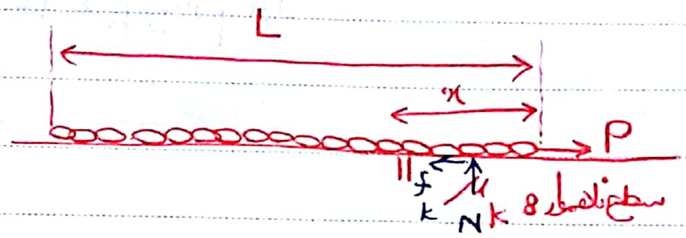
آستانه جداشدن $N_B = 0$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

مثال)



نیروی ثابت P بر زنجیر وارد می‌شود.

زنجیر در $t=0$ در $x=0$ در حال سکون می‌باشد.

ρ : جرم واحد طول زنجیر

@ $x=L \rightarrow V=?$

حل مسائل دیگر دیاگرام آزاد اول رسم می‌کنیم.

$$P - f_k = ma \qquad f_k = \mu_k N \qquad N = m'g = \rho x g$$

(m ← جرم کل)

(m' ← جرم ای که دچار اصطکاک هم می‌شود فقط اون ناحیه‌ای که با x مشخص شده.)

جایگزاری :
$$P - \rho g x \mu_k = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{dV}{dt} = m\frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt}$$

در اصل این معادله دیفرانسیل برحسب زمان است و شتاب چون برحسب x است این طوری باید حل کرد

$$= mV\frac{dV}{dx}$$

$$\int_0^L (P - \rho g \mu_k x)\,dx = \int_0^V mV\,dV$$

$$\left(Px - \rho g \mu_k \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^L = \left(\frac{1}{2}mV^2\right)\Big|_0^V$$

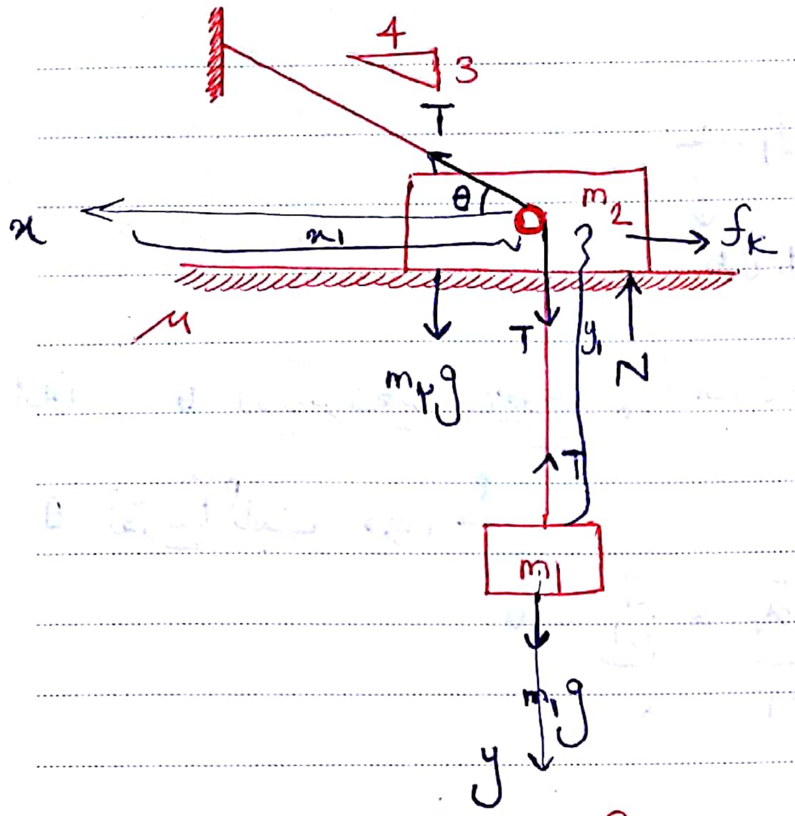
$$\Rightarrow V = \sqrt{\frac{2P}{\rho} - \mu_k g L}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

مثال ا



$m_1 = 15kg$

$m_2 = 30kg$

$\mu_k = \mu_s = 0/25$

$a_2 = ?$ در لحظه اول حرکت

تشکیل دستگاه معادلات همزمان

جرم m_1 : $m_1g - T = m_1a_1$

جرم m_2 :
$y: -T\sin\theta + T + m_2g - N = 0$
$x: T\cos\theta - f_k = m_2a_2$

$f_k = \mu N$

۴ معادله
۵ مجهول
چه باید کرد؟

ما هر چی رابطه‌ی نیرویی بود نوشتیم حال نیاز به یک رابطه‌ی قیدی داریم که معمولاً از روابط هندسی هستند.

ادامه در صفحه بعد

PAPCO

Scanned by CamScanner

رابطه‌ی سینماتیکی : $\frac{x_1}{\cos\theta} + y_1 = L$

↓ طول طناب

θ در لحظه‌ی اول حرکت مشتق

الان θ رو دیگر تغییر نمی‌گیریم چون سخت می‌شه θ در لحظه اول حرکت

θ تقریباً ثابت فرض شود.

$$\frac{\ddot{x}_1}{\cos\theta} + \ddot{y}_1 = 0 \Rightarrow \underbrace{\ddot{x}_1}_{a_2} = -\underbrace{\ddot{y}_1}_{a_1}\cos\theta$$

حال ۵ معادله ۵ مجهول در دست داریم $a_2 = 0{,}77\ m/s^2$

PAPCO
Scanned by CamScanner

Subject
Date

حرکت منحنی الخط:

مختصات عمودی - مماسی:

$$\begin{cases} \sum F_x = ma_n \\ \sum F_t = ma_t \end{cases}$$

$v_n = 0$

$v_t = \rho \dot{\beta}$

$a_n = \rho \dot{\beta}^2 = v\dot{\beta} = \frac{v^2}{\rho}$

$a_t = \rho \ddot{\beta} = \dot{v}$

مختصات قطبی:

$$\begin{cases} \sum F_r = ma_r \\ \sum F_\theta = ma_\theta \end{cases}$$

$v_r = \dot{r}$

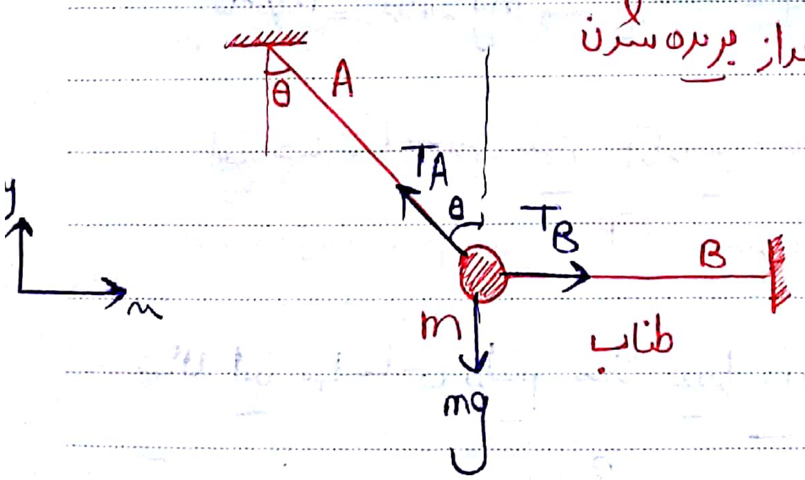
$v_\theta = r\dot{\theta}$

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$

$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$

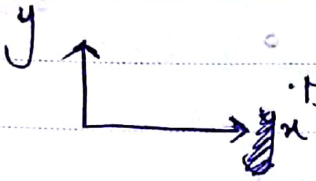
طبیعتاً کارتزین هم هست ها ولی این ۲ تا رو می‌گیریم.

مثال) نسبت کشش (T_A) لحظه بعد از بریده شدن / قبل از بریده شدن طناب B؟



الف) قبل بریده شدن ৪

وضعیت استاتیکی

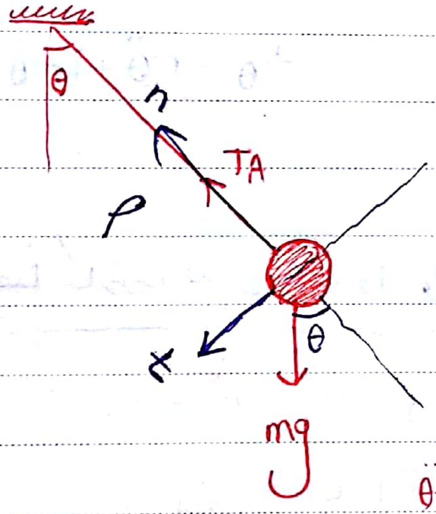


دستگاه x-y استفاده می‌کنیم.

$\Sigma F_x = 0 \quad T_B - T_A \sin\theta = 0$

$\Sigma F_y = 0 \quad T_A \cos\theta - mg = 0 \quad \rightarrow T_A = \dfrac{mg}{\cos\theta}$

ب) بعد از بریده شدن ৪ بعد بریده شدن آن‌گاه می‌شه واسه دستگاه مختصات هم می‌شه هم $r\theta$ یا n-t در نظر گرفت.



$\Sigma F_n = m a_n \rightarrow T_A - mg\cos\theta = m\rho\dot{\theta}^2$ (*)

~~$mg\sin\theta$~~

$\Sigma F_t = m a_t \rightarrow mg\sin\theta = m\rho\ddot{\theta}$

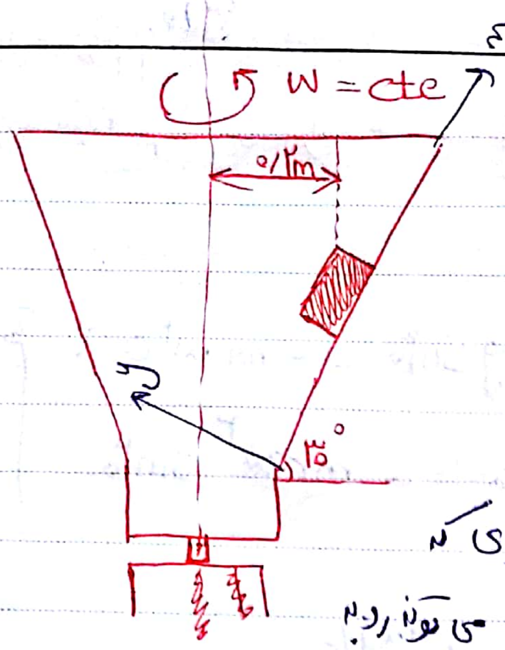
این جا ۳ تا مجهول نداریم ۲ تا داریم چون θ و $\ddot{\theta}$ مشتق زمانی هم هستند ۲ تا مجهول می‌گیریم چون به هم وابسته اند.

حالا این جا ما می‌توانیم معادله دیفرانسیل حل کنیم یا ؟

گفتن لحظه بعد بریده شدن ← لحظه بعد بریدن شدن طبیعتاً سرعت نداریم پس $\dot{\theta}$ صفر است.

$\dot{\theta} = 0 \xrightarrow{(*)} T_A = mg\cos\theta \Rightarrow \dfrac{T_A)_{\text{بعد}}}{T_A)_{\text{قبل}}} = \dfrac{mg\cos\theta}{\frac{mg}{\cos\theta}} = \cos^2\theta$

P4PCO
Scanned by CamScanner

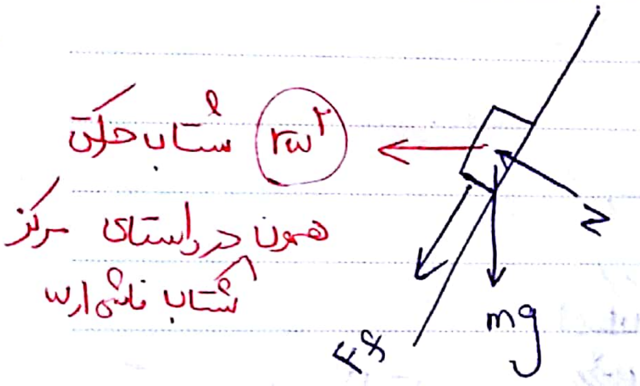


مثال) ضریب اصطکاک استاتیکی بین جرم و دیوار $\mu_s = 0.3$.

در چه محدوده ای از سرعت زاویه‌ای جسم بر روی دیواره ساکن باقی می‌ماند؟

ح: w حداقلی که می‌ذاریم بخوره و w حداکثری که می‌خواد اون رو پرت کنه پس اصطکاک در ۱ حالت می‌تونه رو به بالا باشه و در ۲ حالت رو به پایین.

حالت اول) تمایل حرکت به سمت بالا



$$\begin{cases} \sum F_x = ma_x \rightarrow \\ \sum F_y = ma_y \rightarrow \end{cases}$$

$$-F_f - mg\sin 30 = ma_x = m(-r\omega^2\cos 30) \quad \text{(I)}$$

$\Rightarrow$

$$N - mg\cos 30 = ma_y = m(r\omega^2\sin 30) \quad \text{(II)}$$

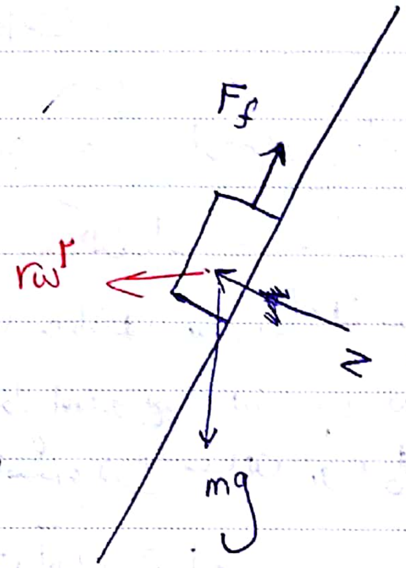
$$F_f = \mu N$$

(I) $$-\mu\underbrace{(mg\cos 30 + mr\omega^2\sin 30)}_{N\ \text{(II)}} - mg\sin 30 = -mr\omega^2\cos 30 \Rightarrow \omega = 7.214\ rad/s$$

Scanned by CamScanner

حالت دوم

فرض می کنیم تمایل حرکت به سمت پایین 8



$$F_f - mg\sin 30 = -mr\omega^2\cos 30$$

$$N - mg\cos 30 = mr\omega^2\sin 30$$

$$\omega = 3{,}404 \ rad/s$$

$$3{,}404 \leq \omega \leq 7{,}214 \quad rad/s$$

اگر ω ثابت نبود به اصطکاک هم واسه اون ω هم داشتیم

مثال) خودرو در یک مسیر دایره ای حرکت می کند.

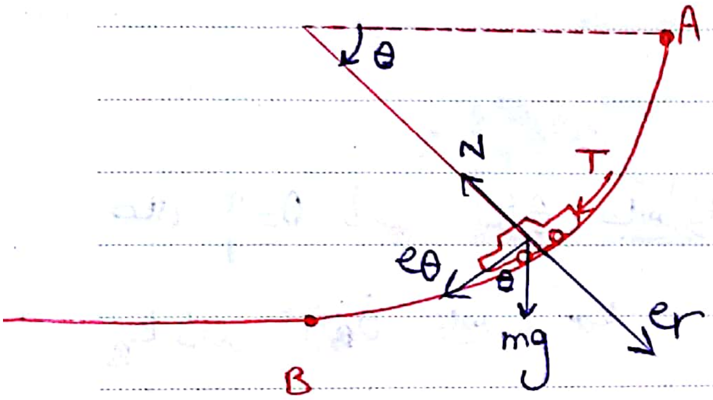
وسیله نقلیه به جرم m تحت اثر وزن و نیروی پیشرانش T در مسیر دایره ای به شعاع r

حرکت می کند. اگر حرکت از نقطه A و از حال سکون شروع شود،

← سرعت در نقطه B ؟

← نیروی N در نقطه B ؟

(از اثر اصطکاک صرف نظر شود)



حل) می توان دستگاه مختصات قطبی در نظر گرفت.

$r = cte \rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$

$\sum F_r = m a_r \rightarrow -N + mg\sin\theta = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$ (I)

$\sum F_\theta = m a_\theta \rightarrow T + mg\cos\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$ (II)

الان ۲ معادله ۳ مجهول داریم ولی در اصل ۲ مجهول چون $\dot{\theta}$ و $\ddot{\theta}$ به هم وابسته اند.

Scanned by CamScanner

Subject
Date

اگر بخواهیم از طریق معادله دیفرانسیل حل کنیم:

معادله دیفرانسیل $mr\ddot{\theta} - mg\cos\theta = T$

↓

حل معادله

$\theta(t)$

↓

$\dot{\theta}(t)$

$V_B = r\dot{\theta}_B$

$\theta = \frac{\pi}{2}$

حال $\theta = \frac{\pi}{2}$ را در $\theta(t)$ جایگذاری کرده و تمام (t_B) را بدست می‌آوریم سپس t_B را در $\dot{\theta}_B(t)$ جایگذاری کرده $\dot{\theta}_B$ بدست می‌آید و در رابطه $V_B = r\dot{\theta}_B$ جایگذاری می‌کنیم.

روش دیگر: $\dot{\theta}$ در معادله (II) ضرب

$$T\dot{\theta} + mg\cos\theta\,\dot{\theta} = mr\ddot{\theta}\,\dot{\theta}$$

حال انتگرال می‌گیریم

$$\int_0^t T\dot{\theta}\,dt + \int_0^t mg\cos\theta\,\dot{\theta}\,dt = \int_0^t mr\ddot{\theta}\,\dot{\theta}\,dt$$

$\theta(0) = 0$

$\dot{\theta}(0) = 0$

$$T\theta + mg\sin\theta = \frac{1}{2}mr\dot{\theta}^2 \rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{2(T\theta + mg\sin\theta)}{mr}$$

این‌ها همگی برحسب t هستند

$$T\theta(t) + mg\sin\theta(t) = \frac{1}{2}mr\dot{\theta}^2(t)$$

ادامه در صفحه بعد

PAPCO

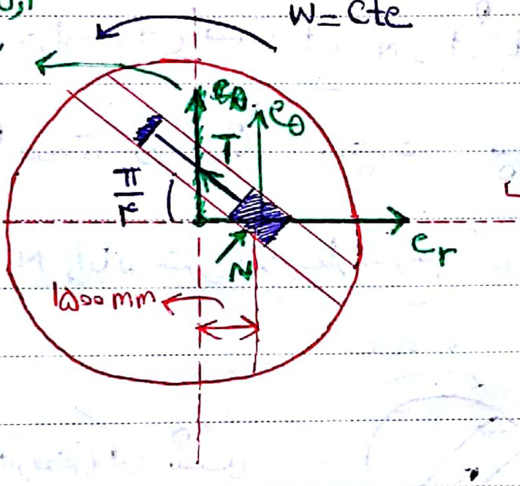
Scanned by CamScanner

ادامه) $v_B = r\dot{\theta}_B = r\dot{\theta}\,(\theta = \frac{\pi}{2}) = r\left[\frac{2(T\frac{\pi}{2} + mg)}{mr}\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r(\frac{\pi T}{m} + 2g)}$

جاگذاری در رابطه ۲ فرمول صفحه قبل وقتی $\theta = \frac{\pi}{2}$
چون نقطه B در $\theta = \frac{\pi}{2}$ است

(I) → $N = mg\sin\theta + mr\dot{\theta}^2 \rightarrow N(\theta = \frac{\pi}{2}) = 3mg + \pi T$

اول جهت e_θ را این گرفتیم بودیم سرعت راستاهم هر ۲ درست اند.



مثال) لغزنده‌ای به جرم ۳kg درون شیار یک دیسک افقی توسط یک نخ بدون اصطکاک قرار گرفته است. $w = 300 \frac{\text{دور}}{\text{دقیقه}} = cte$

کشش نخ $T = ?$

mg نداریم چون داریم از بالا نگاه می‌کنیم و mg در راستای صفحه است در واقع.

این سوال دقیقاً مثل سوال زغال گردون است این مسیر دقیقاً حکم زغال گردون رو داره.

و این r ای که در پایین ما داریم در واقع r حرکت دایره‌ای جسم داخل است.

شعاع مسیر دایره‌ای جسم را فقط

دوران $\vec{r} = cte \rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$

$\dot{\theta} = 300rpm = 300 \times \frac{2\pi}{60} = 10\pi\ rad/s \rightarrow \ddot{\theta} = 0$

Scanned by CamScanner

$$\begin{cases} \Sigma F_r = m a_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -m r \dot{\theta}^2 = -T\cos\frac{\pi}{4} + N\sin\frac{\pi}{4} & \text{(I)} \\ \Sigma F_\theta = m a_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 = T\sin\frac{\pi}{4} + N\cos\frac{\pi}{4} & \text{(II)} \end{cases}$$

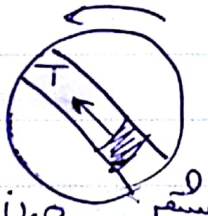
(II) $T = -N \xrightarrow{(I)} -2T\cos\frac{\pi}{4}$

N منفی در اومد یعنی جهت اولیه N رو اشتباه گرفتیم حال تحلیل این چطوری می‌شه

چون با سرعت زاویه‌ای ثابت می‌چرخد پس هیچ شتاب مماسی نباید داشته باشیم

پس N را باید جوری در نظر بگیریم که مولفه‌اش با T ساده شوند.

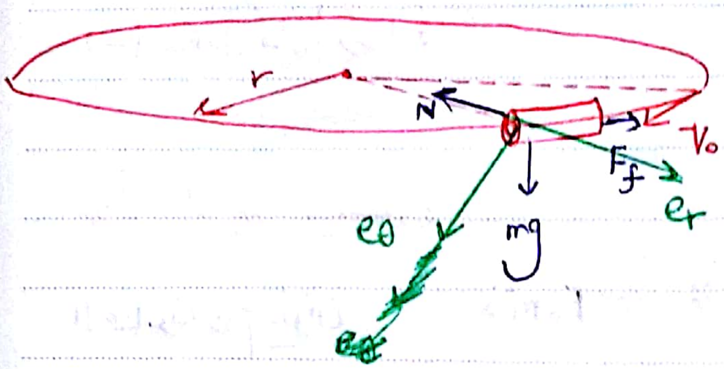
$w = cte$



ولی اگر فرض کن شکل این گونه بود و اون در راستای مرکز قرار داشت دیگر اصلا N نداشتیم چون به طوری T مولفه‌ای ندارد در راستای دیگر که بخواهد ساده شود.

مثال) یک جسم مفروض (m) بر روی طوقه‌ای به شعاع r با سرعت اولیه v_0 حرکت می‌کند

اگر ضریب اصطکاک جنبشی μ_k باشد ← مسافت پیموده شده تا توقف؟



$r = cte \rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$

$t = 0 \rightarrow \theta = 0$, $\dot{\theta} = v_0 \rightarrow \begin{cases} v_r = \dot{r} = 0 \\ v_\theta = r\dot{\theta} \xrightarrow{\theta=0} v_0 = r\dot{\theta}(0) \rightarrow \dot{\theta}(0) = \dfrac{v_0}{r} \end{cases}$

$$\begin{cases} \sum F_r = m a_r \rightarrow -N = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \\ \sum F_\theta = m a_\theta \rightarrow -F_f = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \end{cases}$$

$$F_f = \mu_k N' = \mu_k \sqrt{N^2 + (mg)^2}$$

به طور کلی یادت باشد μ (برآیند نیروهای تماسی) = برآیند نیروی اصطکاک

بقیه اش هم مثل قبلیها حل می‌شود.

P4PCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

ب) اصل کار و انرژی:

روش های بررسی سینتیک:

۱) قانون دوم نیوتن $F = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} \Rightarrow \dot{x} \Rightarrow x$

۲) اصل کار و انرژی

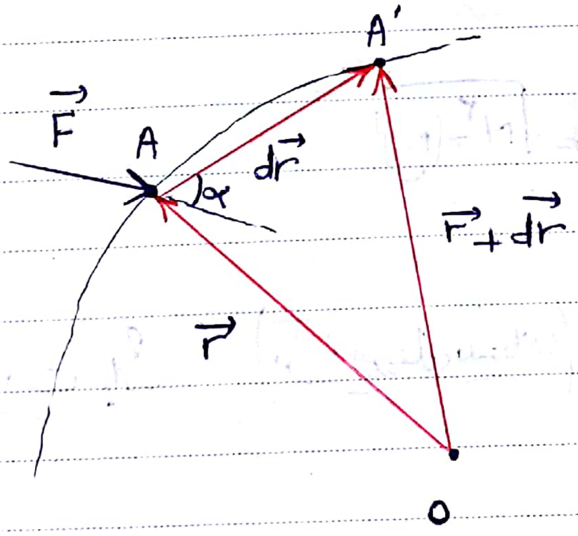
۳) ضربه و مومنتوم

هدف استخراج x و $\dot{x}$ بدون محاسبه شتاب

روش پیشنهادی: انتگرال گیری از نیرو

انتگرال گیری از نیرو:
- نسبت به جابجایی ← معادلات کار و انرژی (فعلاً این بررسی می شود)
- نسبت به زمان ← معادلات ضربه و مومنتم

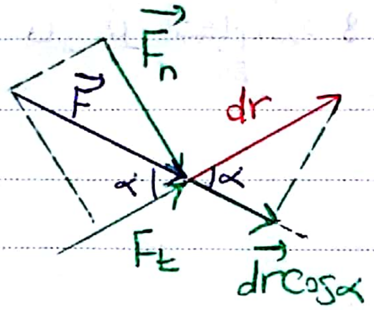
تعریف کار:



کار انجام شده توسط نیروی F در اثر جابجایی $\vec{dr}$ برابر است با:

$dU = \vec{F}\cdot\vec{dr} = |\vec{F}||\vec{dr}|\cos\alpha$

$= F ds \cos\alpha$



$$dU = F\,ds\,\cos\alpha$$

$$dU = (F\cos\alpha)\,ds = F_t\,ds$$

$$dU = F\,(ds\,\cos\alpha)$$

تعبیر اول کار، حاصلضرب (جابجایی) در مولفه نیرو در امتداد جابجایی

〃 دوم 〃 〃 〃 (نیرو) در مولفه جابجایی در امتداد نیرو

نیوتن → $F = m\ddot{x}$ → $x, \dot{x}$ ✓

$\dot{x}, x$ —انتگرالگیری→ زمان → ضربه و مومنتوم

$\dot{x}, x$ —انتگرالگیری→ مکان → کار و انرژی

کار و انرژی / ضربه و مومنتوم } ~~$\ddot{x}$~~

نکته) اگر F_t و جابجایی هم جهت باشند کار مثبت است.

〃 〃 〃 خلاف جهت 〃 〃 منفی است.

واحد کار) ژول (J)، کار انجام شده توسط نیروی 1N در خلال جابجایی 1m.

$1J = 1N\cdot m$ مشابه گشتاور

* گشتاور ← بردار
* کار ← اسکالر ← چون ماهیت کار و گشتاور متفاوت است به اسم جدید (ژول) واحدش را گذاشتند.

کار کل انجام شده:

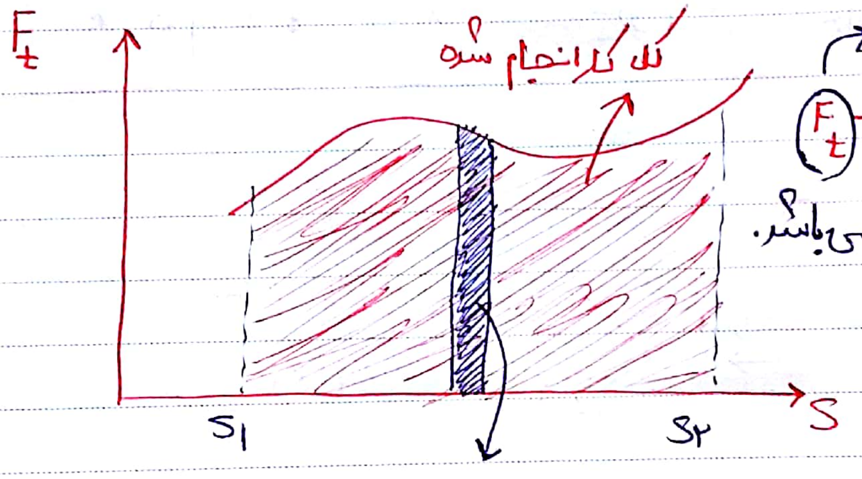
$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

$$d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$$

$$\Rightarrow U = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int F_x dx + F_y dy + F_z dz = \int F_t \, ds$$

F عمومی F_t ← مولفه نیروی مماس بر مسیر

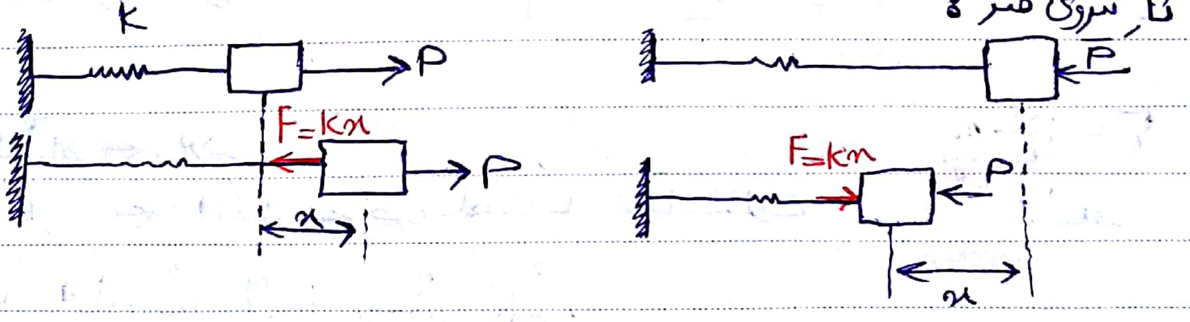
نکته/ سطح زیر منحنی $F_t - S$ برابر کل کار انجام شده می‌باشد.



$$(dU = F_t \, ds)$$

فنرهای خطی: اگر یک فنر خطی توسط نیروی $\vec{P}$ کشیده و یا فشرده شود،

کار نیروی فنر:



P4PCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

* همواره نیروی فنر و جابجایی امتداد جهت عکس هستند. ⟸ در نتیجه کار منفی

$$U = -\int F dx = -\int_{x_1}^{x_2} kx\, dx = -k\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2} = -\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$$

اصل کار و انرژی جنبشی :

$$U = \int_1^2 \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_{S_1}^{S_2} F_t\, ds$$

ضرب داخلی چون برداری اند. (برای $\vec{F} \cdot \vec{dr}$)

ضرب داخلی نیست چون اسکالر شده اند. (برای $F_t\, ds$)

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow U = \int_1^2 \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_1^2 m\vec{a} \cdot \vec{dr}$$

ساباپ قبل: $\vec{a} \cdot \vec{dr} = a_t\, ds$

⟵ مولفه مماسی شتاب ذره m

این فقط برای شتاب مماسی قابل قبول است در حرکت مستقیم الخط هم استفاده می کنیم چون فقط شتاب مماسی داشتیم.

از طرفی ⟵ $a_t\, ds = v\, dv$

$$\vec{a} \cdot \vec{dr} = v\, dv \quad (*)$$

در ادامه بالا) $\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow U = \int_1^2 \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_1^2 m\vec{a} \cdot \vec{dr} \overset{(*)}{=} \int m v\, dv$

$$= \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

تعریف) انرژی جنبشی یک ذره (T)

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

کاری که باید بر روی ذره m انجام شود تا آن را از حالت سکون به سرعت v برساند

$$U = \Delta T = T_2 - T_1$$ معادله کار و انرژی :

کار کل انجام شده توسط همه نیروهای وارد بر ذره در طول حرکت از وضعیت ① به ② برابر تغییر انرژی جنبشی ذره می باشد.

بیان دیگر $$T_1 + U = T_2$$

مزیت اصل کار و انرژی :

برای بررسی حرکت سیستم مجموعه ذرات ، تنها اثر نیروهای خارجی منظور می گردد

نیروهای داخلی { مقدار و نقطه اثر یکسان / خلاف جهت یکدیگر } ⇐ مجموع کار خالص نیروهای داخلی صفر می باشد.

Scanned by CamScanner

توان :

میزان انجام کار یا انتقال (انرژی) در واحد زمان

$$P=\frac{dU}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{F}\cdot d\vec{r})=\vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}+\frac{d\vec{F}}{dt}\cdot\vec{r}$$

($\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}$ ، $\frac{d\vec{F}}{dt}\to 0$ نیرو ثابت)

← این تغییرات نیرو بر حسب زمان است چون در اصل ما از نیروهای ثابت استفاده می کنیم این صفر است.

$$\boxed{P=\vec{F}\cdot\vec{v}}$$

واحد : $1\,N\,m/s = 1\,J/s = 1W$ وات

نکته : قابلیت یک ماشین توسط (توان خروجی) سنجیده می شود نه (انرژی خروجی)

↓

یک ماشین مفید در زمان زیادی بتواند انرژی زیادی را تولید کند.

بازده :

بازده مکانیکی ← نسبت کار انجام شده توسط ماشین به کار انجام شده بر روی ماشین

در مدت زمان یکسان

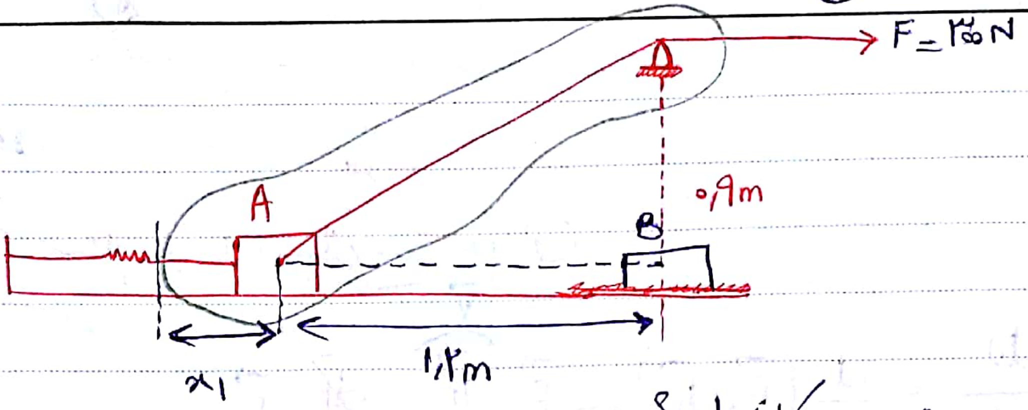
$$e_m=\frac{P_{output}}{P_{input}} \qquad e_m<1$$

بازده کل ←

$$e=e_m\ e_e\ e_t\ \ldots$$

(e_m مکانیکی ، e_e الکتریکی ، e_t حرارتی)

Scanned by CamScanner



مثال)

$m = ۵۰kg$

$K = ۸۰ \, N/m$

- نیرو ثابت از حالت سکون وارد شده است
- فنر کشیدگی اولیه $x_1 = ۰/۲۳۳m$
- سرعت قطعه زمان رسیدن به موقعیت B = ?

این سوال را اگر بخواهی با نیوتن حل کنی خیلی پیچیده می شود. چرا چون α در حال تغییر است همواره و $a = \ddot{x}$ در اصل باید ۲ معادله دیفرانسیل حل می کردی.

حل) $U = \Delta T = T_B - T_A = \frac{1}{۲} m v_B^{۲} - ۰$

طناب و جرم به صورت یک مجموعه واحد منظور می گردد.

mg، N ← کار صفر چون (نیرو با جابجایی عمود است)

F، نیروی فنر : نیروهای خارجی وارد بر مجموعه

Scanned by CamScanner

Subject
Date

ادامه)

$$\text{کار فنر} = U_S = -\int_{x_1}^{x_2} F_S\,dx = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,dx = \left[-\frac{1}{2} ۸۰ x^2\right]_{۰/۲۳۳}^{۱/۲+۰/۲۳۳}$$

$$= -۸۰J$$

$$\text{کار نیروی } F = U_F = F\Delta = ۳۰۰\left(\underbrace{\sqrt{۰/۹^2+۱/۲^2}}_{۱/۵} - ۰/۹\right) = ۱۸۰J$$

جابجایی در راستای F

طولی از طناب که کم می‌شود Δ است.

$$\Rightarrow U = U_S + U_F = ۱۸۰ - ۸۰ = ۱۰۰ = \frac{1}{2} m v_B^2 \rightarrow v_B = ۲ m/s$$

سری سریع اول جلسه ۱ شنبه ۸
(آخر قبل عید)

اصل کار و انرژی — اب

نیوتن : $F \rightarrow \ddot{x} \rightarrow \dot{x} \rightarrow x$ ✓

سینتیک < کار و انرژی ، ضربه و مومنتوم

$\ddot{x}$ —انتگرال گیری→ < $t \rightarrow$ ضربه و مومنتوم ، $x \rightarrow$ کار و انرژی

مولفه مماسی

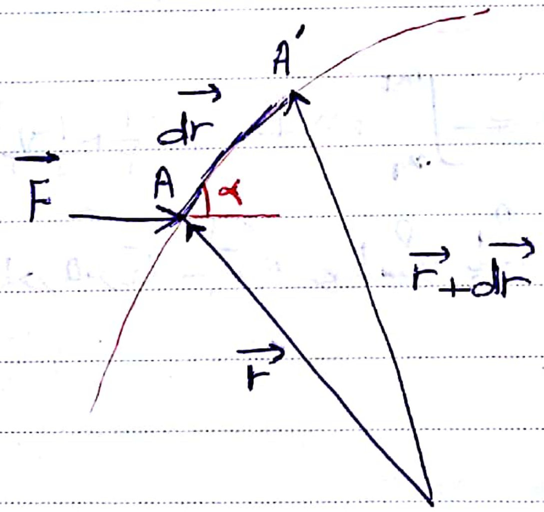
$$dU = \vec{F}\cdot d\vec{r} = |\vec{F}||d\vec{r}|\cos\alpha = F\,ds\cos\alpha$$

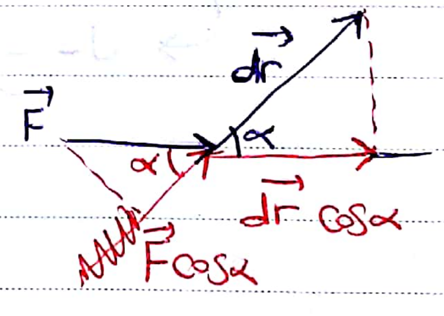
$dU = (F\cos\alpha)\,ds = F_t\,ds$ ۲ بیان

$dU = F(ds\cos\alpha)$

واحد کار $1N\cdot m$ است و چون واحد گشتاور هم همین است ولی گشتاور برداری است ولی کار اسکالر است برای کار از J استفاده می کنیم.

$1N\cdot m = 1J$





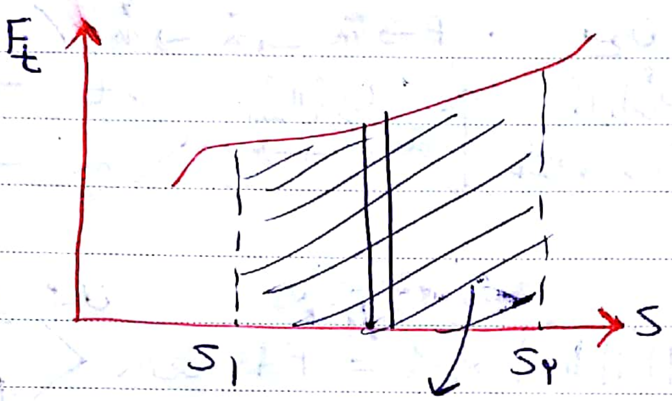
PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$
$$\vec{dr} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$U = \int \vec{F}\cdot\vec{dr} = \int F_x dx + F_y dy + F_z dz = \int F_t ds$$



سطح زیر نمودار = کار انجام شده

فنرهای خطی : ← کشیده یا فشرده شدن

$$U = -\int F dx = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,dx = -\frac{1}{2}k\left(x_2^2 - x_1^2\right)$$

ثابت فنری مثبت که همواره باشد.

Subject
Date

اصل کار و انرژی:

(اصل کار و انرژی جنبشی)

$$U=\int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{s_1}^{s_2} F_t\, ds$$

ضرب داخلی — فرم ضرب معمولی

$$\vec{F}=m\vec{a} \rightarrow U=\int_1^2 m\vec{a}\cdot d\vec{r} = \int_{v_1}^{v_2} m v\, dv = \frac{1}{2}m(v_2^2-v_1^2)$$

$\vec{a}\cdot d\vec{r} = a_t\, ds$
$a_t\, ds = v\, dv$

$\vec{a}\cdot d\vec{r} = v\, dv$

داشتیم $T=\frac{1}{2}mv^2$ ← انرژی جنبشی

طبق تعریف کار و انرژی: یعنی مقدار کاری که از سرعت صفر به سرعت v می‌رسد.

$$\boxed{U=\Delta T = T_2-T_1}$$

کار کل نیروهای وارد بر ذره

مزیت کار و انرژی: بر روی مجموعه ذرات: بر روی سیستم

(کار نیروهای داخلی حذف می‌شه چون جابجایی کل سیستم که برابره و جهت نیروهای داخلی هم عکس هم است)

پس $U=\Delta T$ → کار نیروهای خارجی وارد بر سیستم

PAPCO

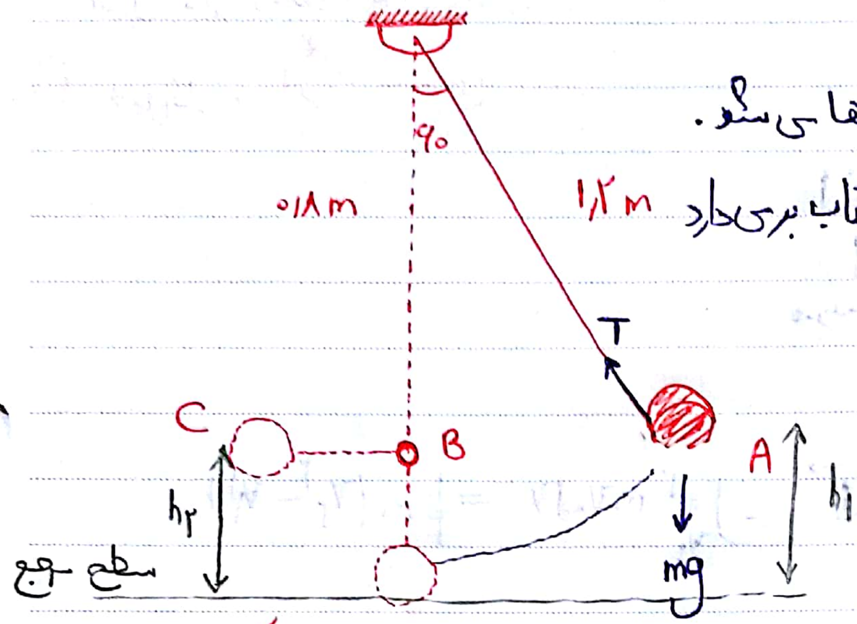
Scanned by CamScanner

Subject
Date

مثال)

- گوی از A با سرعت $3\,m/s$ رها می‌شود.
- در پایین‌ترین مکان، حول B تاب برمی‌دارد.

$v_C = ?$



نیروهای وارد بر گوی: T (همواره عمود بر مسیر حرکت) $U_T = 0$ نیرو کشش بر مسیر عمود

mg روش محاسبه کار، ۲ روش است. روش ۱: mg رو تجزیه کنی و ...

۲ روش است که جابجایی رو تصویر کنیم. سادرا این جا از بیان دوم استفاده می‌کنیم.

اول از همه ۲ سطح مرجع درنظر می‌گیریم.

$$U_{mg} = mg(h_1 - h_2) = m \times 9/8 \times 0/2 = 1/96m$$

$\to h_1 = 1/2(1 - \cos 60) = 0/6$

$\to h_2 = 0/4$

$$U = \Delta T \Rightarrow 1/96\cancel{m} = \frac{1}{2}\cancel{m}\left(v_C^2 - v_A^2\right)$$ ($v_A = 3$)

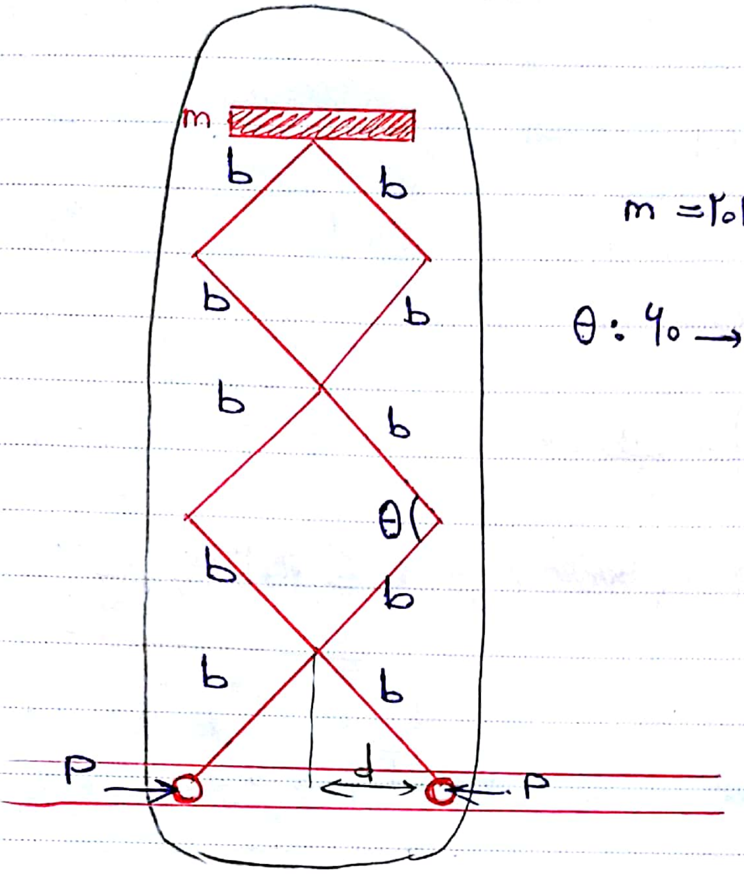
$v_C = 3/59\,m/s$

سطح مرجع رو جای دیگه هم می‌گرفتی اختلافش همین می‌شد. ← Δh

PAPCO

Scanned by CamScanner

مثال)



$m = 20 kg$ $P = 1100 N$ $b = 0/25$

$\theta : 90 \to 180$

$v_0 \; @ \; \theta = 90 = 0$

$v_f \; @ \; \theta = 180 = ?$

روش حل) چون واسه جرم m می‌خواهیم یا می‌شه m رو جدا در نظر گرفت یا کل سیستم رو در نظر گرفت. اگر m رو جدا در نظر بگیریم به mg داره به P تا هم از این نیروهای داخلی بخش وارد می‌شه و ما باید عکس العمل این نیروهای داخلی‌ها رو بدست بیاوریم و به محاسبه کنیم چون خیلی سخت می‌شه ~~و~~ این نیروها بر حسب θ هستند.

برای همین کل سیستم را در نظر می‌گیریم.

نیروهای وارد بر سیستم ← mg ، P ، N

$U_N = 0$ ← N

* mg به طوری که چون به سمت پایین است که تغییر ارتفاع به سمت پایین باشد کار مثبت و اگر به سمت بالا باشد کار منفی است.

PAPCO

Scanned by CamScanner

$U=\Delta T$ $\quad U = Fd + Fd - mg\Delta h$

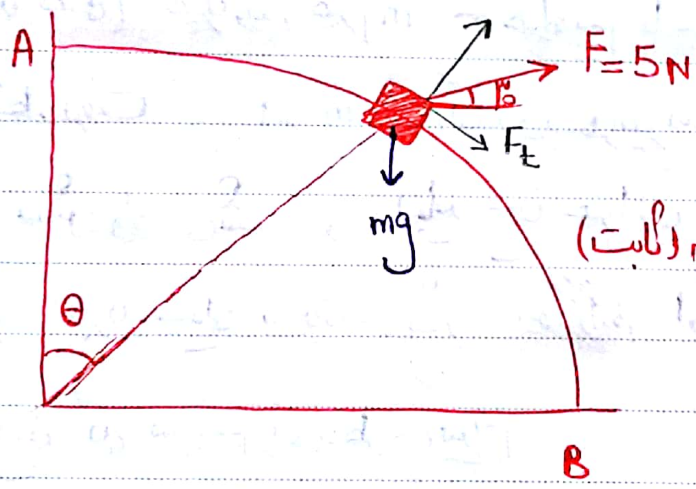
$d = b\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, b$

$\Delta h = 5 \times b\left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\right) = \frac{5b}{2}$

$U = \left(2 \times 1100 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right)b - \left(20 \times 9.8 \times \frac{5}{2}\right)b = 15368.5\, J$

$\Delta T = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$ $\quad U=\Delta T \rightarrow v_f = 5.95\, m/s$

مثال)



- از اصطکاک صرف نظر
- نیروی F با راستای افق زاویه ۳۰ درجه (ثابت)
- مسیر دایروی با شعاع $r=0.2m$

$m = 0.5kg$
$F = 5N$ $\quad v_A = 0 \rightarrow v_B = ?$

نیروها ← mg ، F ، N

N راستای نیرو رو نمی‌دونیم ولی $U_N=0$ چون بر راستای مسیر عمود است.

فرض کن اگر مثلاً در دسته کاترین بشری v_m اندازی چون سرعتا مماس بر مسیره و اگر در B نگاه کنی امش سرعت در راستای m نداریم .

Subject

Date

$U = \Delta T$

$\Delta T = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2} m v_B^2$

$U_{mg} = + mg (0/2) = 0/981 J$

اول علامتش

$U_F = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int F_t \, ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F \cos(\frac{\pi}{4} + \theta) \, r d\theta$

مولفه نیرو در راستای جابجایی

چرا از ۰ تا $\frac{\pi}{2}$ دقت کن θ کجاس. ✓

$= \int Fr \, [\sin(\theta + \frac{\pi}{4})]_0^{\frac{\pi}{2}} = Fr[\sin(120) - \sin(30)] = 0/336 J$

$\frac{1}{2} m v_B^2 = U_{mg} + U_F \rightarrow v_B = 2/321 \ m/s$

نکته‌ی بسیار مهم 8 در کار و انرژی نمی‌شه بار واسه a نوشت، باز واسه y باید نفی نوشت مثلاً اگر نیرو رو در راستای طول تجزیه می‌کردی

$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = F_x \times 0/2 - F_y \times 0/2$

فکر کنم.

PAPCO

جلسه بعد در باره این بحث سئوال ممکن است هیچ کاربردی نباشد. (فکر کنم)

جلسه جدید

$$U = \int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int m\vec{a}\cdot d\vec{r} = \int_{s_1}^{s_2} m\, a_t\, ds = \int_{v_1}^{v_2} m\, v\, dv = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

$\rightarrow T_2 - T_1 = \Delta T$

تعریف $T = \frac{1}{2}mv^2$

$U = \Delta T$

↓ کار همه نیروهای وارد بر ذره

$$P = \frac{dU}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

کار نیروهای خارجی

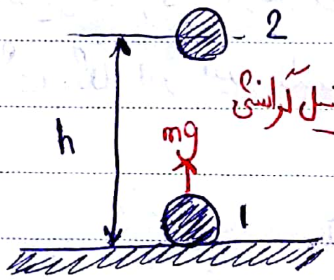
↑

چندین ذره → ~~نیروی داخلی~~ → یک سیستم → $U = \Delta T$

(حذف نیروهای داخلی) ↙ ↘ تغییرات انرژی جنبشی یک سیستم

انرژی پتانسیل:

الف) عبارت است از مقدار کاری که در مقابل میدان جاذبه باید انجام شود تا ذره را به اندازه h از سطح مبنا بالا ببرد.



انرژی پتانسیل گرانشی $V_g = mgh$ → در اصل یعنی نیروی mg به سمت بالا وارد شده و فاصله h را بپیماید.

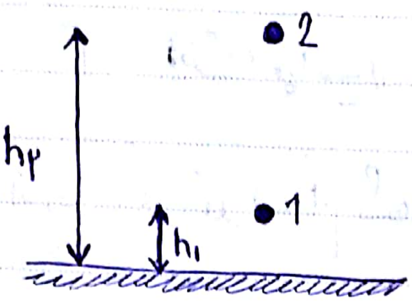
تا با اون mg به سمت پایین غالب شده و بشه آوردش بالا. (کار)

$V_g = -U_{mg}$ ⊛

← انرژی پتانسیل برابر منفی کار انجام شده توسط وزن وقتی بخواد از ① به ② بره.

PAPCO
Scanned by CamScanner

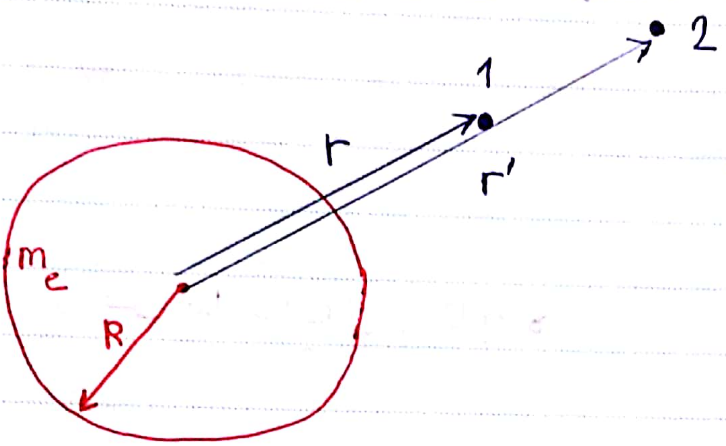
Subject
Date



$$\Delta U_g = mgh_2 - mgh_1 = mg\Delta h$$

(*) $$\Delta U_g = -W_{mg_{1\to 2}}$$

تغییر انرژی پتانسیل برابر کار انجام شده توسط نیروی گرانشی با علامت منفی می‌باشد.



- به ازای ارتفاعات زیاد

نیروی گرانش $$F = \frac{Gmm_e}{r^2} = \frac{mgR^2}{r^2} \quad , \quad g = \frac{Gm_e}{R^2}$$

کار نیروی گرانش $$W_F = \int_r^{r'} -F\,dr = -\int_r^{r'} \frac{mgR^2}{r^2}\,dr = -mgR^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)$$

طبق تعریف و طبق صفحه قبل: انرژی پتانسیل گرانشی، خلاف کار نیروی جاذبه می‌باشد،

بنابراین:

$$U_g' - U_g = -W_F \rightarrow \boxed{U_g = \frac{-mgR^2}{r}}$$

در نتیجه در طی جابجایی از r_1 تا r_2، تغییرات انرژی پتانسیل

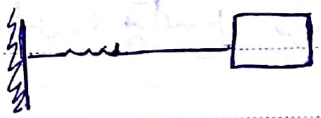
$$\boxed{\Delta U_g = mgR^2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$

P4PCO

Scanned by CamScanner

ب) انرژی پتانسیل الاستیک فنر:

تعریف: کار انجام شده بر روی فنر برای تغییر طول x



$$V_e = \int_0^x kx\,dx = \frac{1}{2}kx^2$$

(*) $V_e = -U_{\text{فنر}}$

در حین جابجایی از x_1 تا x_2:

~~$\Delta V_e = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2$~~

$$\Delta V_e = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2$$

(*) $\Delta V_e = -U_{\text{فنر}\ 1\to 2}$

PAPCO
Scanned by CamScanner

بازنویسی معادله کار و انرژی :

کار انجام شده از 1 تا 2 $\quad U_{1-2} = \Delta T \quad$ تغییرات انرژی جنبشی

$$U_{1\to2}^{\text{فنر}} + U_{1\to2}^{\text{گرانش}} + U'_{1\to2} = \Delta T$$

$$-\Delta V_e - \Delta V_g + U'_{1\to2} = \Delta T \rightarrow \boxed{U'_{1-2} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e}$$

U'_{1-2}: کار نیروهای خارجی غیر از فنر و گرانش

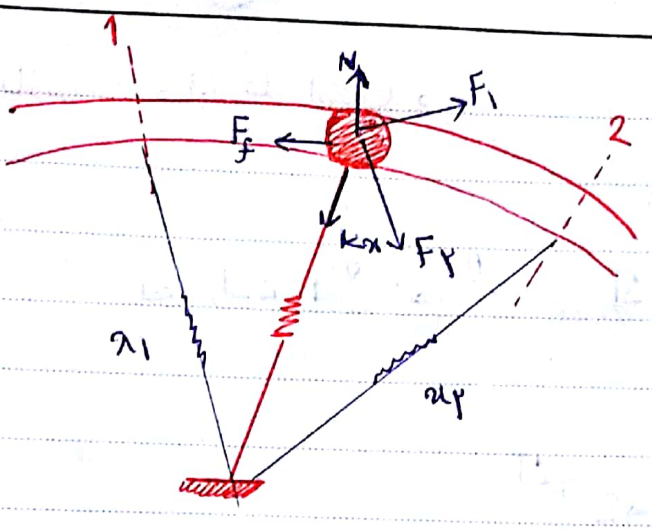
علت بازنویسی :

ساده‌سازی معادلات به علت **انرژی ذخیره فنر و گرانش** !؟

کار انجام شده و یا تغییرات انرژی پتانسیل فنر و گرانش، تنها به مکان نقطه ابتدایی و انتهایی وابسته است و به مسیر بستگی ندارد.

P4PCO
Scanned by CamScanner

Subject
Date



$1 \rightarrow 2$

اگر می‌خواستیم از رابطه اول کار و انرژی یعنی بازنویسی نشده استفاده کنیم:

$$U = \Delta T \rightarrow U_{F_1} + U_{F_2} + U_{mg} + U_{\text{فنر}} + U_N + \dots = \Delta T$$

راستا و اندازه نیروی فنر متغیر است ⇐ پیچیده

از رابطه دوم و بازنویسی شده:

$$U' = \Delta T + \Delta V_e + \Delta V_g \rightarrow U_{F_1} + U_{F_2} + U_N + \dots = \Delta T + \Delta V_e + \Delta V_g$$

ساده چون فقط حالت اول و نهایی را می‌خواهیم (تغییر طولشون)

Scanned by CamScanner

قانون بقای انرژی مکانیکی:

$$U'_{1\to2} = \Delta T + \Delta V_e + \Delta V_g = \Delta(T + V_e + V_g)$$

تعریف: انرژی مکانیکی کل سیستم $E = T + V_e + V_g \Rightarrow \boxed{U'_{1\to2} = \Delta E}$

(*) جرم و فنر را یک سیستم واحد در نظر می‌گیریم چرا چون انرژی پتانسیل فنر هم حفظ شود

if $U'_{1\to2} = 0 \Rightarrow \Delta E = 0 \to \boxed{E = \text{ثابت}}$ قانون بقای انرژی مکانیکی

اگر $U'_{1\to2} = 0$ باشد، انرژی مکانیکی کل سیستم ثابت می‌ماند، در این حالت انرژی پتانسیل و جنبشی می‌توانند به یکدیگر تبدیل گردند.

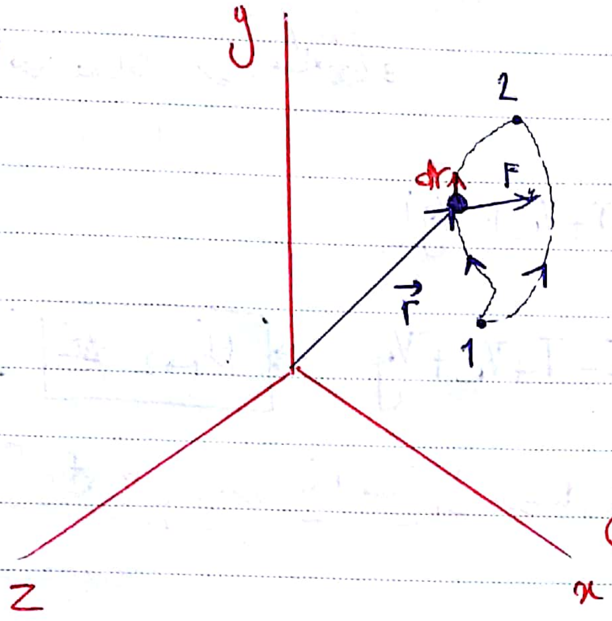
میدان نیروهای پایستار: (conservative Force)

یادآوری: کار انجام شده توسط نیروی گرانش و یا الاستیک فقط به تغییر موقعیت خالص بستگی دارد و به مسیر وابسته نیست.

نیروهای با این خاصیت مرتبط با میدان نیروهای پایستار می‌باشد.

PAPCO

Scanned by CamScanner



کار انجام شده حرکت از نقطه ① به ②

$$dU = \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$U = \int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_1^2 F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad (*)$$

به طور کلی وابسته به مسیر بین ① تا ② می باشد.

اما اگر $\vec{F}\cdot d\vec{r} = -dV$

dV دیفرانسیل دقیق تابع اسکالر V باشد.

V تابعی از مختصات باشد.

$$U_{1-2} = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{V_1}^{V_2} -dV = -(V_2 - V_1)$$

نیروی پایستار: نیرویی که کار انجام شده توسط آن (حاصل انتگرال) به مسیر بستگی نداشته باشد و فقط به نقطه ابتدا و انتها وابسته باشد.

(*) اگر V یک تابع اسکالر باشد آنگاه:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

از مقایسه با (*) بالای صفحه داریم:

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

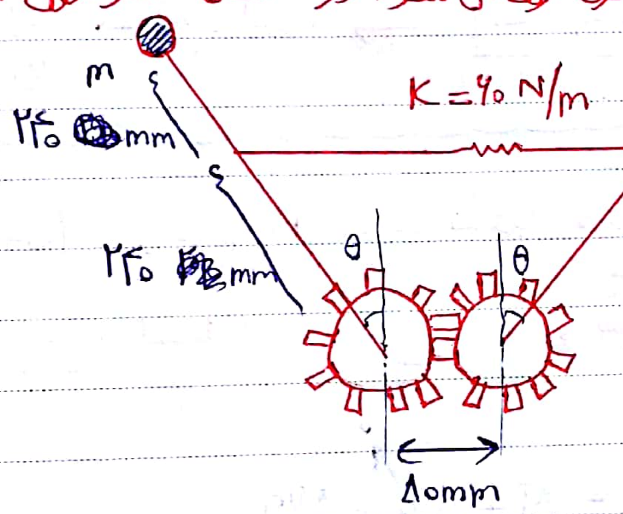
به طور کلی اگر به نیرویی ۳۰ تا شرطی که دو ستون دایره کشیدم رو داشت اون نیرو پایستار است مثل فنر یا وزن یا هر نیروی دیگری که این خواص را داشته باشد.

$V=\frac{1}{2}kx^2 \quad F_x=-kx$ (فنر)

$V=mgh \quad F_x=-mg$ (وزن)

طبق رابط صفحه قبل برقرارند.

مثال ۲ گوی به جرم $m=1.5kg$ از حالت سکون رها می‌شوند در $\theta=0$ فنر بدون کشش می‌باشد.



$\theta=0^\circ \rightarrow V_1=0$

$\theta=30^\circ \rightarrow V_2=?$

اصل: $\Delta T+\Delta V_e+\Delta V_g=U'_{1\to2}=0 \quad U_N=0$ ~~چون هیچ نیروی خارجی نداریم~~

البته ما U_N داریم چون به ... جاوصله ولی چون حرکت ندارد $U_N=0$ است

$\Delta T=\frac{1}{2}\times(2m)V_2^2-\frac{1}{2}(2m)V_1^2 \; (V_1=0) =1.5V_2^2$

$\Delta V_e=\frac{1}{2}kx_2^2-\frac{1}{2}kx_1^2 \; (x_1=0) =\frac{1}{2}(40)(2\times0.24\times\sin30)^2=\dots$

$\Delta V_g=2mg(h_2-h_1)=2\times1.5\times9.81\times(0.48\cos30-0.48)=\dots$

P4PCO
Scanned by CamScanner

جلسه جدید

مرور جلسه قبل

$$U_{1\to2} = \Delta T$$

انرژی مکانیکی

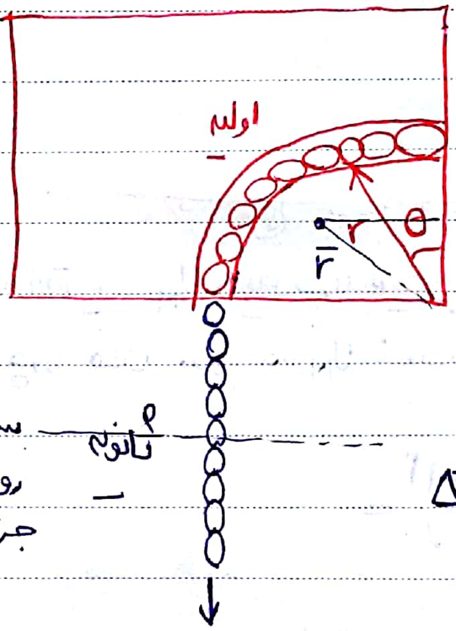
$$U'_{1\to2} = \Delta T + \Delta V_e + \Delta V_g = \Delta E$$

تابع موقعیت اول و آخر ← کار تابع مسیر نیست ← نیروی پایستار { فنر، وزن

بحث ← تبدیل انرژی $\xrightarrow{\text{فیزیکی}}$ $E_1 = E_2$ ← $\Delta E = 0$ ← $U'_{1\to2} = 0$ بقای انرژی مکانیکی

ارتعاشات

مثال) زنجیری از حالت سکون در داخل شیار بدون اصطکاک به حرکت در می‌آید سرعت زنجیر در لحظه‌ای که آخرین حلقه، شیار را ترک می‌نماید؟



سطح مبنا رو مرکز جرم می‌گیریم

$$U'_{1\to2} = \Delta T + \Delta V_e + \Delta V_g$$

($U'_{1\to2} = 0$ و $\Delta V_e = 0$)

چون یا نیرو نداریم
یا کارش صفر است مثل نیروی عمود بر سطح

$$\Delta T = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m v_2^2$$

($v_1 = 0$)

ادامه در صفحه بعد

PAPCO

Scanned by CamScanner

ادامه)

$$\Delta V_g = mg(h_2 - h_1) = mg(0 - h_1)$$

چون سطح مبنا رو روی مرکز جرم حالت ثانویه گرفتیم

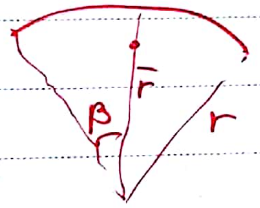
بالا مرکز جرم اون نیم‌دایره رو حساب کنیم + فاصله از سطح مبنا

طول زنجیر

$$h_1 = \frac{\frac{2\pi}{4}}{2} + \bar{r}\sin\frac{\pi}{4} \rightarrow \bar{r} = \frac{r\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}}$$

بعد جای گذاری h_1 در بالا و بدست آوردن.

چون ارتفاع عمودی رو می خواهیم — از استاتیک

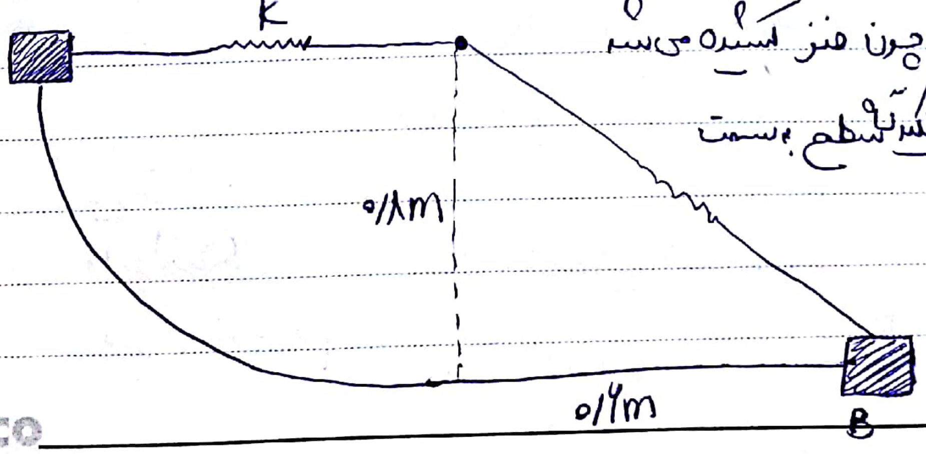


$$\bar{r} = \frac{r\sin\frac{\beta}{2}}{\frac{\beta}{2}}$$

مثال) جرم از نقطه A رها می‌شود

$m = 3\,kg$ $\quad k = 200\ N/m$

$x_{آزاد} = 0/4\,m$ $\quad V_A = 0 \rightarrow V_B = ?$



الان N به سمت خارجه چرا چون فنر کشیده می‌شه و در اصل اون باید در کشش سطح به سمت خارج بکشد.

Subject
Date

اصل) $\cancel{W}_{1-2}^{\,0} = \Delta T + \Delta V_e + \Delta V_g$

(نیروی N)

$\Delta T = \frac{1}{۲} m V_B^{۲} - \frac{1}{۲} m \cancel{V_A^{۲}}^{\,0}$

$\Delta V_g = mg(h_B - h_A) = ۳ \times ۹/۸۱ \times (۰ - ۰/۸) = \ldots$

$\Delta V_e = \frac{1}{۲} k (x_B^{۲} - x_A^{۲}) = \frac{1}{۲} k (۰/۶^{۲} - ۰/۴^{۲}) = \ldots$

$x_B = \sqrt{۰/۶^{۲} + ۰/۸^{۲}} - ۰/۴ = ۰/۶$

$x_A = ۰/۸ - ۰/۴ = ۰/۴$

$\Rightarrow$ در آخر $\rightarrow V_B = 1/۵۳۷ \; m/s$

مبن در امتحان نمی‌دهند تو می‌دونی از کدوم بخشه ۳تا راه داری که 8

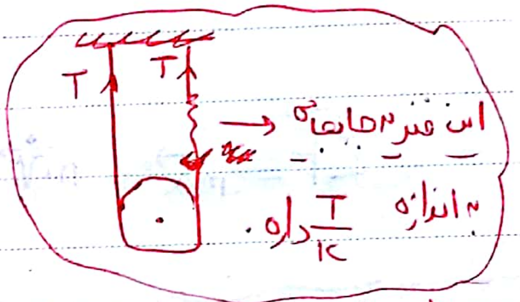
نیوتن
کار و انرژی →
ضربه و مومنتم

مثال) سیستم از سکون رها می‌شود. در این حالت فنر ۷۵mm کشیده شده است.

وقتی وزنه ۱۲mm سقوط کرد، سرعت چقدر است؟

$$U_{1-2} = \Delta T + \Delta V_e + \Delta V_g$$

چون نیروهای تکیه‌گاهی جابجا نمی‌شن →



چرا از حل همین طوری گفته شد.

$$\Delta T = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m v_2^2$$

$$\Delta V_g = mg(h_2 - h_1) = mg(0 - 0.012)$$

$$\Delta V_e = \frac{1}{2} k x_2^2 - \frac{1}{2} k x_1^2 \qquad x_1 = 0.075$$

$$x_2 = 0.075 + 0.012 \times 2 = 0.099$$

← چرا چون وقتی وزنه ۱۲mm بیاد پایین در اصل همین هم می‌رود ... است فنر ۱۲mm باید پایین بیاید.

$$\rightarrow v_2 = \sqrt{\ }$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

ج) ضربه و مومنتم

روش های بررسی سینتیک ⟵ کار و انرژی (درس نیوتن) ⟵ انتگرال گیری نیرو نسبت به مکان

ضربه و مومنتم ⟵ انتگرال گیری نیرو نسبت به زمان

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\dot{\vec{V}} = \frac{d}{dt}(m\vec{V})$$

اگر m ثابت باشد.

تعریف: مومنتم خطی (اندازه حرکت خطی)

حاصل ضرب جرم در سرعت ذره ⟵ $\vec{G} = m\vec{V}$

واحد: $kg\ m/s = N.S$

⊛ برآیند کل نیروهای وارد بر ذره برابر است با تغییرات مومنتم خطی نسبت به زمان:

$$\sum \vec{F} = \dot{\vec{G}}$$

⊛ مومنتم یک کمیت برداری است. بنابراین با تجزیه آن در دستگاه مناسب می توان به صورت اسکالر بیان نمود.

$$\begin{cases} \sum F_x = \dot{G}_x \\ \sum F_y = \dot{G}_y \\ \sum F_z = \dot{G}_z \end{cases}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

اصل ضربه - مومنتوم خطی :

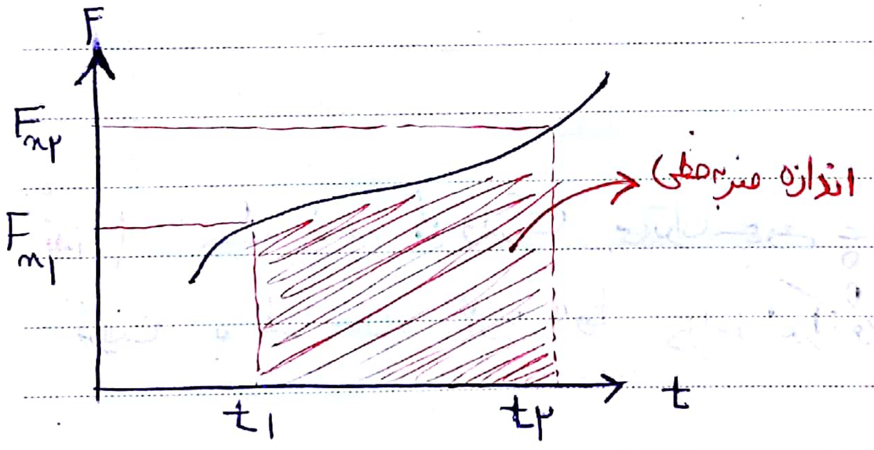
$$\vec{\Sigma F} = \dot{\vec{G}} \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \vec{\Sigma F}\, dt = \int_1^2 d\vec{G}$$

$$\rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \vec{\Sigma F}\, dt = \vec{G_2} - \vec{G_1} = \Delta G$$

تعریف : ضربه خطی : حاصل ضرب نیرو در زمان ~~...~~ انتگرال ضربه خطی (Linear impulse)

← انتگرال ضربه خطی کل وارد بر ذره از لحظه t_1 تا t_2 برابر است با تغییر مومنتوم خطی ذره

ضربه بردار است .



$$\int_{t_1}^{t_2} F_x dt = G_{x2} - G_{x1} \qquad \int_{t_1}^{t_2} F_y dt = G_{y2} - G_{y1}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} F_z dt = G_{z2} - G_{z1}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject

Date

بقای مومنتوم خطی :

اگر به طور سیستمی در نظر گرفته شود
برآیند نیروهای خارجی

اگر در بازه ای از زمان، برآیند نیروهای وارد بر ذره صفر باشد ⇐

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta\vec{G}=0} \text{ یا } \boxed{\vec{G}_1=\vec{G}_2}$$

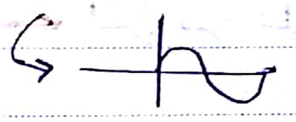
اندازه حرکت خطی ذره در بازه زمانی مذکور پایستار می باشد.

یا F صفر باشد

یا F به جوری باشد

که این انتگرال صفر شود

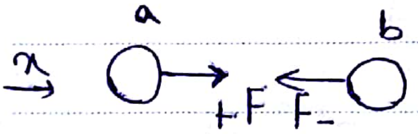
مثل sin



نکته ۱) مومنتوم خطی ممکن در یک جهت دارای بقا باشد و در جهات دیگر نباشد

در جهت x : $\sum F_x=0 \to \int \sum F_x\,dt=0 \to G_{x_2}=G_{x_1}$

نکته ۲) مشابه اصل کار و انرژی می توان مجموعه چند ذره را به صورت یک سیستم در نظر گرفت به طور مثال : ۲ ذره a و b دارای اندرکنش معروف است :



$$\int F\,dt = \Delta G_a$$

$$\int -F\,dt = \Delta G_b$$

$$\Rightarrow 0 = \Delta G_a + \Delta G_b = \Delta(G_a+G_b)$$

$$\to G_{\text{کل}} = G_a + G_b = \text{ثابت}$$

P4PCO

Scanned by CamScanner

جلسه جدید

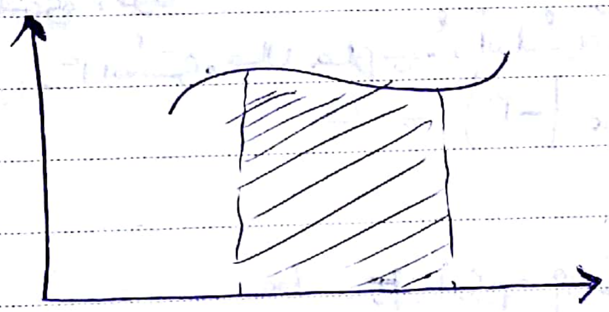
$\sum \vec{F} = \dot{\vec{G}}$ $\vec{G} = m\vec{V}$

$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \int_1^2 d\vec{G} \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \vec{G}_2 - \vec{G}_1 = \Delta\vec{G}$

ضربه خطی

انتگرال ضربه خطی

اسکالر $\int F_x \, dt = G_{x_2} - G_{x_1}$



$\int \vec{F} dt = 0 \xrightarrow[\text{بقای}]{} \vec{G}_1 = \vec{G}_2$

بقای مومنتوم خطی

PAPCO

Scanned by CamScanner

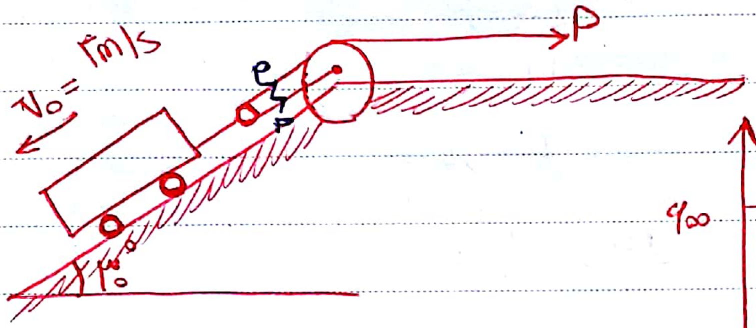
Subject
Date

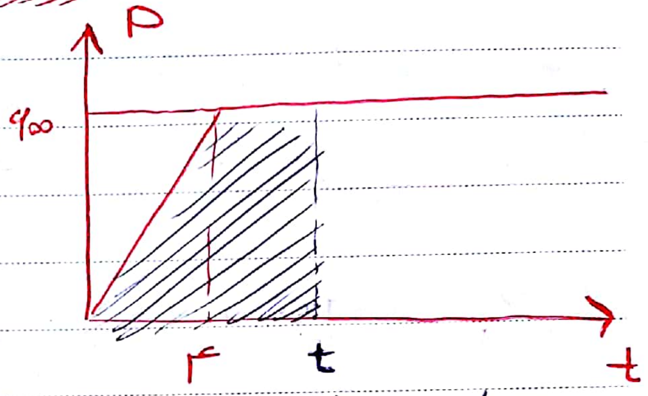
مثال) سطح شیب دار بدون اصطکاک

الف) لحظه‌ای که سرعت صفر شود.

ب) سرعت پس از گذشت ۸ ثانیه

$m = 150kg$





t م دلخواه که فرض جا
می‌کنیم از ۴ بیشتره. حالا معلوم می‌شه آیا اشتباه فرض کردیمش.

الف) $\int_0^t F_x dt = mv_2 - mv_1 = -150(-4) = 600$

$F_x = 2P - mg\sin 30 \rightarrow \int_0^t (2P - mg\sin 30)\, dt = 600$

$2\int_0^t P dt - mg\sin 30 \int_0^t dt = 600$

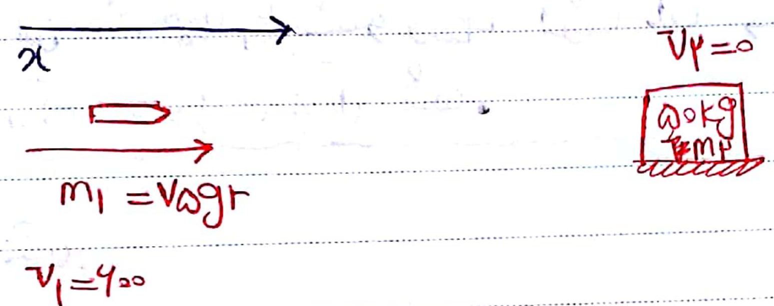
فرض $t > 4$ $\rightarrow 2\left(\frac{600 \times 4}{2} + 600(t-4)\right) - 150 \times 9.8 \times \sin 30 \times t = 600$

$\rightarrow t = 6.46\, s \rightarrow > 4$ ✓ درست فرض کرده بودیم.

ب) $\int_0^8 2P\,dt - mg\sin 30 \int_0^8 dt = 100(v_2 - (-4)) \rightarrow v_2 = 4.76\ m/s$

مثال) گلوله‌ای به جرم $75gr$ و سرعت $600\ m/s$ به جسمی در حال سکون به جرم ۵۰ کیلوگرم برخورد و فرو می‌رود. انرژی تلف شده در اثر برخورد؟

در اصل یکی می‌شه با جسم دیگر.



حل) ⊛ سیستم شامل ۲ جزء — این گونه مسائل را اگر سیستمی در نظر بگیری خوبی‌اش این است که دیگر نیروهای داخلی از بین می‌روند.

$\sum F_x = 0 \rightarrow \vec{G}_1 = \vec{G}_2 \rightarrow \vec{G}_{\text{قبل برخورد}} = \vec{G}_{\text{بعد برخورد}}$!

اینها چی‌اند؟ گلوله و جسم اولیه و ثانویه نیز چون سیستم در نظر گرفتیمشان می‌شود قبل برخورد و بعد برخورد.

$\rightarrow m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1+m_2)v_f \rightarrow 0.075\times600 + 50\times0 = 50.075\,v_f$

$\rightarrow v_f = 0.89\ m/s$

PAPCO
Scanned by CamScanner

ادامه)

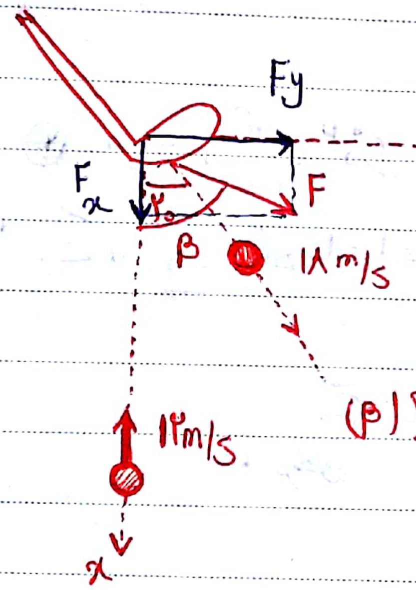
قبل برخورد $E = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} \times 0/075 \times 400^2$

بعد از برخورد $E' = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_f^2 = \frac{1}{2} \times 50/075 \times 0/89^2$

$\Delta E = E_1 - E_2 \rightarrow$ انرژی تلف

این نتیجه چون E_1 بیشتر و در E_2 انرژی تلف شده و به حرارت تبدیل شده.

مثال)



y ← فرض: نیروی وارده ثابت است

جرم توپ: 20gr زمان ضربه: 0/05s

الف) مقدار نیرو؟ ب) زاویه بین نیرو با محور x ؟ (β)

در اصل ۲ تا سئوال یعنی هم F_x و هم F_y یا هم اندازه و هم جهت ولی ما مجهول هستند.

$$\int_0^t \vec{F}\,dt = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 \rightarrow \vec{F}\,\Delta t = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

F ثابت

$\vec{v}_1 = -12\vec{i} \qquad \vec{v}_2 = 18\cos 30\,\vec{i} + 18\sin 30\,\vec{j}$

$\vec{F}(0/05) = 0/02\left((18\cos 30 + 12)\vec{i} + 18\sin 30\,\vec{j}\right) \rightarrow \vec{F} = 0/5|\ \sim\ )$

$$\tan\beta = \frac{F_y}{F_x}$$

P4PCO

Scanned by CamScanner

حال ما همین طوری هم بلد می توانستیم بگوییم β کمتر یا بزرگتر یا مساوی ۲۰ است

سپس توپ ما از ابتدا در راستای x ، $12 m/s$ سرعت داشت بعد $18\cos 20$ در راستای برعکس

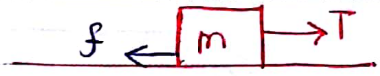
سرعت می گیرد در صورتی که در جهت y فقط $18\sin 20$ داره پس در راستای x منفی قوی است

که توپ بتونسته در جهت عکس اش کند و سرعت هم داشته باشد پس در این جا می توان گفت

که β کمتر از ۲۰ است یه چیزی نزدیک ۱۲.

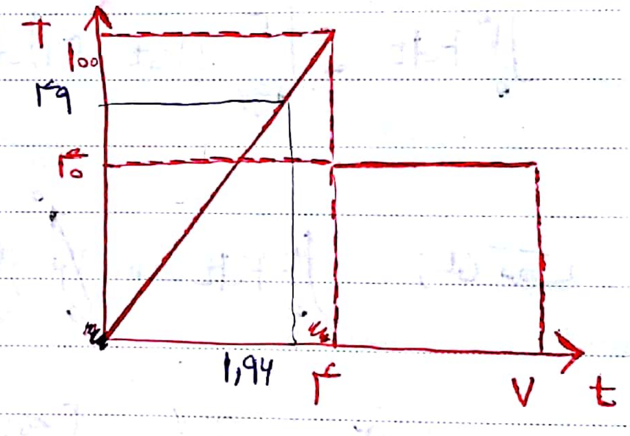
مثال) الف) حداکثر سرعت چه بلوک؟

ب) مدت زمان کل حرکت بلوک؟



$m = 10 kg$

$\mu_s = \mu_k = 0.5$



$\int F dt = \Delta G = m\Delta V$

$f = \mu_s N = 0.5 \times 10 \times 9.8 = 49 N$

اگر نیرو بزرگتر یا مساوی این باشد حرکت می کند.

$F = T - f$
↓
(?)

نمودار T−t : بدست آوردن معادله خط $T = \frac{100}{4} t = 25t$

لحظه شروع حرکت

$\rightarrow T = f = 49 \rightarrow t = 1.96 s$
↓
این جا مساوی گرفتیم

PAPCO
Scanned by CamScanner

Subject
Date

$$\int_0^t F dt = \int_0^{1.96} (T-f)\,dt + \int_{1.96}^{4} (T-f)\,dt + \int_{4}^{7} (T-f)\,dt + \int_{7}^{t} (T-f)\,dt$$

۰   (T-۴۹)   (۴۰-۴۹)   (۰-۴۹)

الف) در t=۴ شتاب منفی می‌شود پس ماکزیمم سرعت در این جا اتفاق می‌افتد.

ماکزیمم سرعت ← شتاب منفی ← @ t=۴ حداکثر سرعت

$$\int_0^4 F dt = \int_{1.96}^{4} (25t - 49)\,dt = 52 = m(v_{max} - v_0) \Rightarrow v_{max} = 5.2\, m/s$$

ب) $\int_0^t F dt = m(v_2 - v_1) = 0$ زمان توقف

$$0 + 52 - [9t]_4^7 - [49t]_7^t = 0 \rightarrow t = 7.51\, s$$

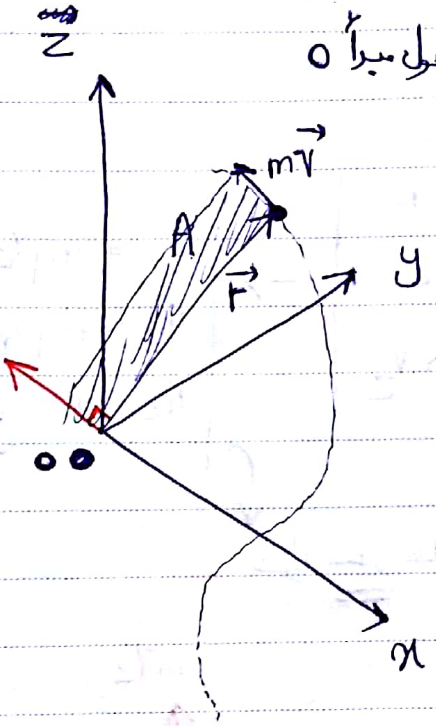
آیا حتماً لزومی داره که نیرو قطع شه تا بایستد؟ اگر کم باشه اون نیرو ولی اگر لازمه هم داشته باشه بازم می‌ایستد.

Subject
Date

ضربه زاویه ای و مومنتم زاویه ای :

مومنتم زاویه ای $(\vec{H}_O)$:

گشتاور بردار مومنتم خطی $m\vec{v}$ حول مبدأ O



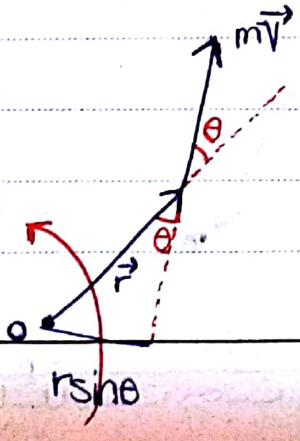
$\vec{H}_O = \vec{r} \times m\vec{v}$

$\vec{H}_O = \vec{r} \times m\vec{v}$

$\vec{H}_O = \vec{r} \times \vec{G}$

نکته : - $\vec{H}_O$ برداری عمود بر صفحه A که توسط ۲ بردار $\vec{r}$ و $\vec{v}$ ایجاد می شود خواهد بود.

- بزرگی $\vec{H}_O$: $H_O = mvr\sin\theta$ ، θ : زاویه بین $\vec{r}$ و $\vec{v}$



$H_O = mv(r\sin\theta)$

واحد : $kg\ m/s\ m = N.s\ m$

واحد ضربه که قبلا هم گفتیم

فرم اسکالر:

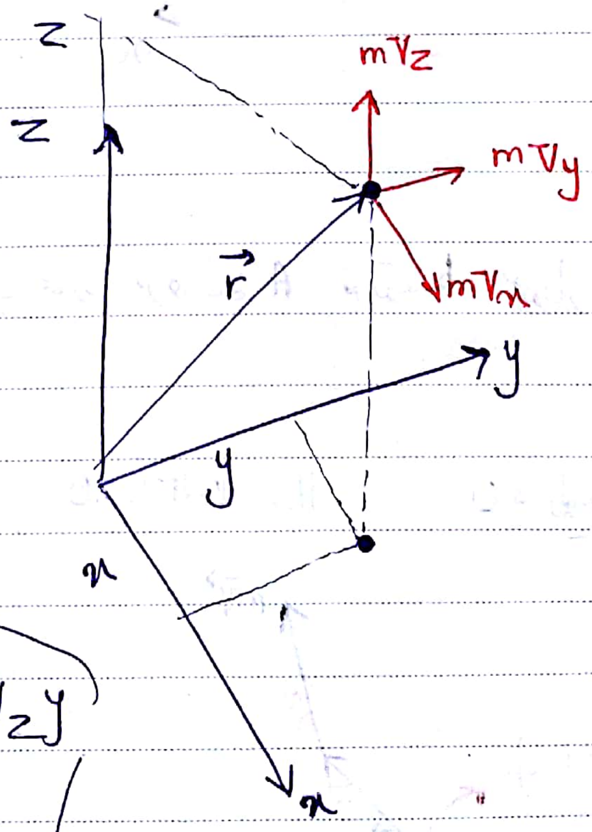
$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

$$\vec{H}_o = \vec{r} \times m\vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix} \rightarrow \begin{cases} H_x = m(v_z y - v_y z) \\ H_y = m(v_x z - v_z x) \\ H_z = m(v_y x - v_x y) \end{cases}$$

$\vec{H}_o$ ↓ حول نقطه O

حول محورهای x, y, z



این دقیقاً همون H_x بالایی است.

$$H_x = 0 + -mv_y z + mv_z y$$

$H_y =$ ~~~

$H_z =$ ~~~

واسه علامت ها مثلاً شست در جهت x و چهار انگشت در جهت اون.

PAPCO

Scanned by CamScanner

و ا m علامت ۴ انگشت در جهت مثلاً mV_y مثبت در جهت منفی
ی شود پس علامتش منفی است.

مانیستر جدید

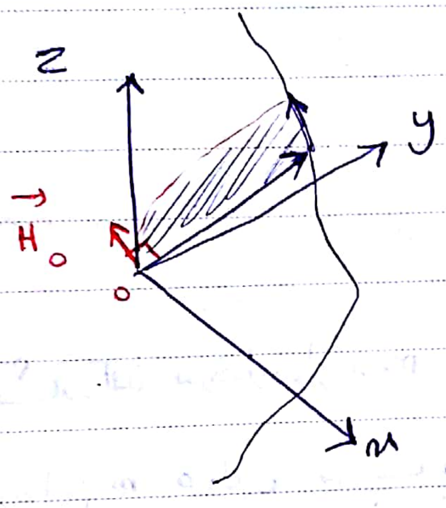
$\vec{H_o} = \vec{r} \times m\vec{V} = \vec{r} \times \vec{G}$ → اسکالر $H_x =$ ~~~

بردار حول مبدأ

محور ← $H_y =$ ~~~

محور ← $H_z =$ ~~~

محور



اندرس اول جلسه

مرخ تغییر مومنتم زاویه‌ای

اگر $\vec{\Sigma F}$ برآیند نیروهای وارد بر ذره P باشد آنگاه گشتاور $\vec{M_o}$ حول مبدأ

ادامه در صفحه بعد

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject
Date

$$\sum \vec{M}_o = \vec{r} \times \sum \vec{F} \longrightarrow \boxed{\sum \vec{M}_o = \vec{r} \times m\dot{\vec{V}}}$$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\dot{\vec{V}}$$

از طرفی $\vec{H}_o = \vec{r} \times m\vec{V} \xrightarrow{d/dt} \dot{\vec{H}}_o = \dot{\vec{r}} \times m\vec{V} + \vec{r} \times m\dot{\vec{V}}$ ، $\dot{\vec{r}} = \vec{V}$

$$= \vec{V} \times m\vec{V} + \vec{r} \times m\dot{\vec{V}} = \vec{r} \times m\dot{\vec{V}}$$

چون ضرب خارجی هر بردار در خودش صفر است.

$$\boxed{\sum \vec{M}_o = \dot{\vec{H}}_o}$$

(*) گشتاور کل نیروهای وارد بر m حول نقطه ثابت o ، برابر است با تغییر مومنتوم زاویه‌ای m حول o نسبت به زمان

فرم اسکالر

$\sum M_x = \dot{H}_x$ → حول محور x

$\sum M_y = \dot{H}_y$

$\sum M_z = \dot{H}_z$

PAPCO

اصل مومنتم - ضربه زاویه‌ای

ضربه زاویه‌ای : حاصلضرب گشتاور در زمان

$$\sum \vec{M}_o = \dot{H}_o \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{M}_o \, dt = \int_1^2 dH_o$$

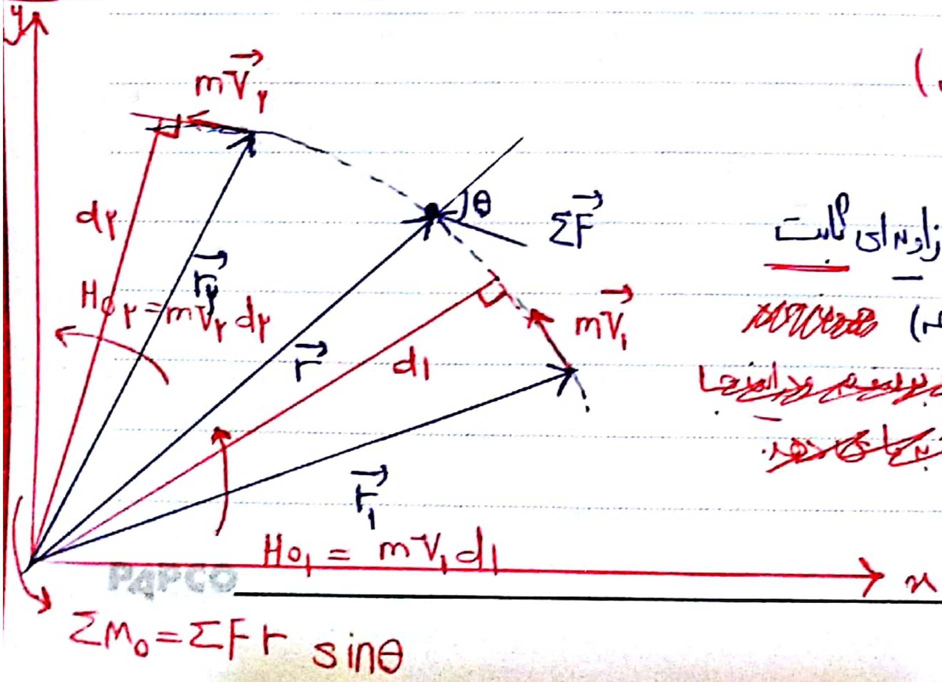
ضربه‌ی زاویه‌ای کل وارد بر ذره حول نقطه ثابت o، برابر است با تغییرات مومنتم زاویه‌ای حول o

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{M}_o \, dt = \vec{H}_{o_2} - \vec{H}_{o_1} = \Delta H_o$$

فرم اسکالر:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum M_x \, dt = H_{x_2} - H_{x_1} = m\left[(v_z y - v_y z)_2 - (v_z y - v_y z)\right]$$

حالت خاص: (حرکت در صفحه)



در حرکت در صفحه:
- راستای مومنتم زاویه‌ای ثابت (عمود بر صفحه)
- جهت و مقدار مومنتم زاویه‌ای متغیر

$$\sum M_o = \sum F r \sin\theta$$

Scanned by CamScanner

$$\Sigma \vec{M_o} = \vec{r} \times \Sigma \vec{F} = \Sigma F \, r \sin\theta \, \vec{k}$$

$\vec{H}_{o_1} = \vec{r_1} \times m\vec{V_1} = mV_1 d_1 \vec{k}$ → ببین نکته‌ای که وجود داره اینه است که r و mV اصلاً نیستن برهم عمود

پس تنها کاری که ما باید انجام دهیم اینه که راستای mV را ادامه دهیم و طول بازوی عمود d_1 را بدست آوریم.

$$\vec{H}_{o_2} = \vec{r_2} \times m\vec{V_2} = mV_2 d_2 \vec{k}$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \Sigma \vec{M_o} \, dt = \Delta \vec{H_o} \rightarrow \boxed{\int_{t_1}^{t_2} \Sigma F \, r \sin\theta \, dt = m(V_2 d_2 - V_1 d_1)}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

بقای تکانه زاویه‌ای :

اگر گشتاور نیروها حول o در یک بازه زمانی صفر باشد، آنگاه تکانه زاویه‌ای حول o ثابت می‌ماند :

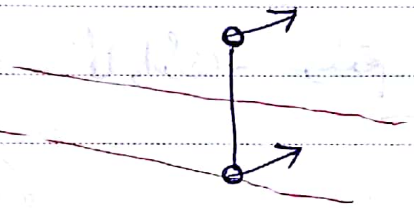
$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{M}_o \, dt = 0 \Rightarrow \Delta \vec{H}_o = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{H}_{o_{t_1}} = \vec{H}_{o_{t_2}}}$$

نکته ۱) تکانه زاویه‌ای می‌تواند حول یک محور بقا داشته باشد و حول محور دیگر نداشته باشد.

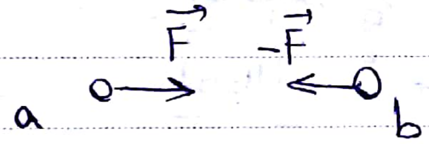
مثلاً

حول این محور داره (چون حول این گشتاور صفر می‌شه)

حول این نداره



نکته ۲) می‌توان چند ذره را به صورت سیستم در نظر گرفت



$$\Delta \vec{H}_{o_a} = \int \vec{r} \times \vec{F} \, dt$$

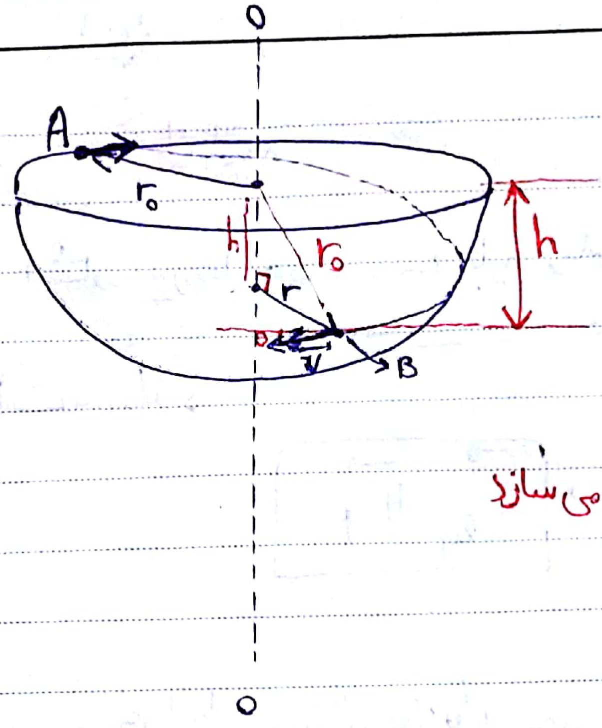
$$\Delta \vec{H}_{o_b} = \int \vec{r} \times (-\vec{F}) \, dt$$

$$\rightarrow \Delta \vec{H}_{o_a} + \Delta \vec{H}_{o_b} = 0 \rightarrow \Delta (\vec{H}_{o_a} + \vec{H}_{o_b}) = 0$$

$$\rightarrow \Delta \vec{H}_o = 0$$

PAPCO

Scanned by CamScanner



مثال) یک ظرف به شکل نیم کره

- به ذره m واقع بر لبه افقی ظرف سرعت اولیه v_0 داده می‌شود (A)

- در نقطه B سرعت ذره v با افق زاویه θ می‌سازد

$\theta = ?$

مین ۳ راه داری ~~نیوتن~~ - کار و انرژی - مومنتم

نیوتن ↓ شتاب می‌خواد که

این جا انرژی نیس

این جا از این روش نمی‌تونی بری

مومنتم ← واسه این زمان لازمه

یا

$\Sigma M = 0$

$\Sigma F = 0$

حل) نیروهای وارد بر ذره: N, mg ← گشتاور O-O:
- صفر (متقاطع با محور)
- صفر (موازی با محور)

← بقای مومنتوم زاویه‌ای

یادآوری: موقع به طور کلی حول محور گشتاور داشتیم زمانی که بشه شست رو در راستای محور گذاشت و بعد فکر کنم ۴ انگشت در جهت نیرو

وقتی (راستای نیرو و محور) موازی اند گشتاور نداریم‌ها چون گشتاور حول محور با حول نقطه فرق داره.

$$\sum \vec{M}_{o-o} = 0 \rightarrow \Delta H_o = 0 \rightarrow H_{o_1} = H_{o_2} \rightarrow m v_0 r_0 = m(\overset{?}{v}\cos\overset{?}{\theta})\overset{?}{r}$$

پس در حالت دوم ۳ مجهولی داریم که چون سرازیری با معادله کاری با این نداریم ولی اون افقیه می‌شه این.

طبق روابط هندسی $\quad r^2 = r_0^2 - h^2$

کار نیروهای خارجی ← N ← کار = صفر (عمود بر مسیر)

$$\Delta E = 0 \rightarrow E_1 = E_2 \rightarrow T_1 + V_{g_1} = T_2 + V_{g_2} \rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 + mgh = \frac{1}{2} m v^2 + 0$$

$$\cos\theta = \frac{v_0 r_0}{v r} = \frac{v_0 r_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}\,\sqrt{r_0^2 - h^2}} \rightarrow \theta = \checkmark \qquad v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

Scanned by CamScanner

مثال) سیستم از حالت سکون شروع به حرکت

سرعت 150rpm را در اثر نیروی ۲۰ نیوتن در t ثانیه بدست آورید.

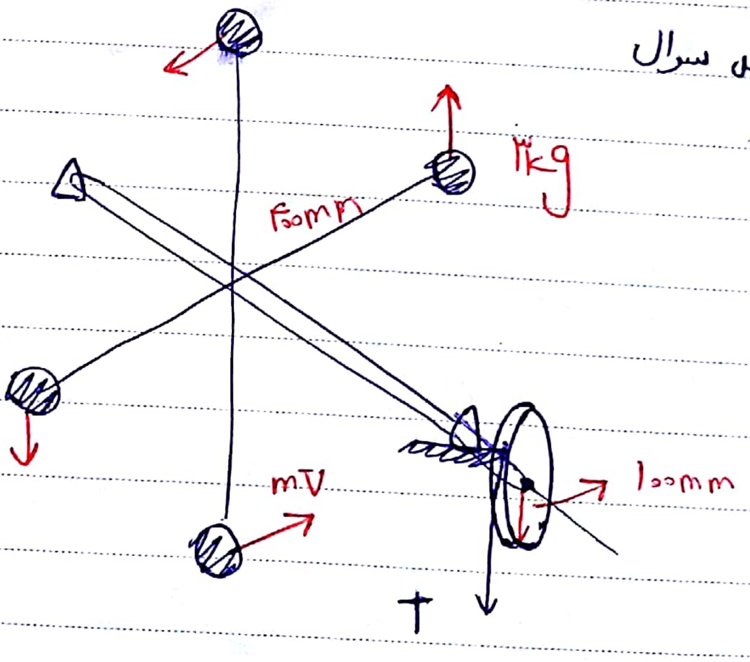
- جرم میله های و اصطکاک ناچیز.

چون زمان داریم مومنتم است چون دورانی است مومنتم زاویه ای داریم.

نیروهای خارجی (برکل سیستم): mg، T

پس اگر می خواستی تک تک بشری به نیرو بری ناشی از هر میله به جسم را باید حساب می کردیم که سخت بود لذا به سیستم کامل می گیریم.

شکل سوال



Scanned by CamScanner

ما برای mg ها گشتاور نداریم چرا چون در هر حالت متقارن هستند و همدیگر را در این شکل خنثی می کنند.

$$\int \sum \vec{M}_o \, dt = \Delta \vec{H}_o \rightarrow \int_0^t T(0/1)\,dt = \overset{\text{۴ تا جسم}}{4}(mv)r - \overset{\text{سکون}}{0}$$

$$v = rw = 0/4 \times 150 \times \frac{2\pi}{60} \rightarrow (20 \times 0/1 \times t) = 4\left(3 \times 0/4 \times 150 \times \frac{2\pi}{60}\right)(0/4)$$

$$\rightarrow t = 15/08\,s$$

کاربرد خاص ۵

۱) برخورد

- یکی از کاربردهای مهم اصل ضربه مومنتم، رفتار اجسام در برخوردی باشد.

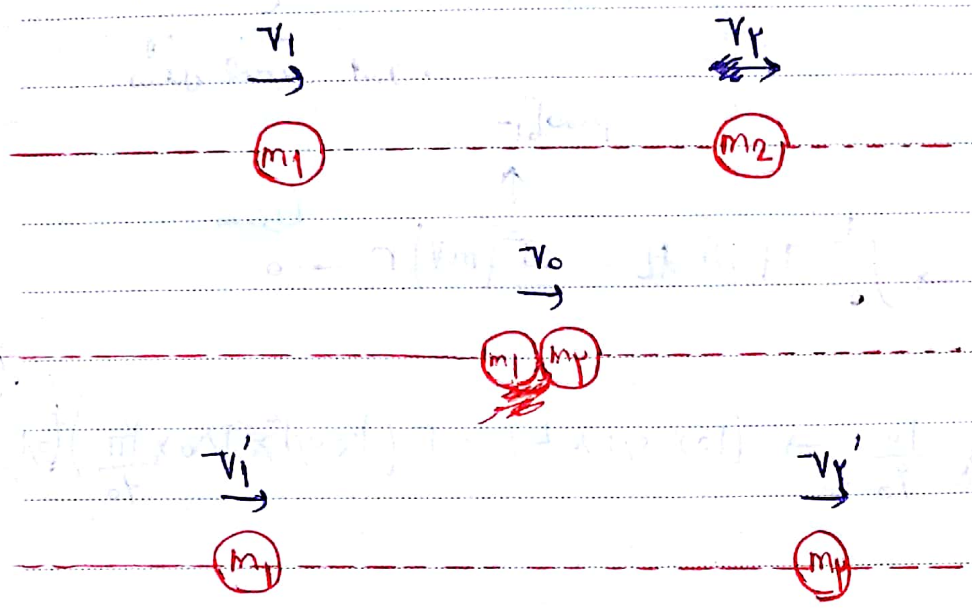
- در برخورد، در مدت زمان کوتاهی نیروهای بزرگی به جسم اعمال می شود.

- این پدیده همراه با تغییر شکل الاستیک_پلاستیک، تولید صدا و حرارت می باشد.

ادامه در صفحه بعد

Scanned by CamScanner

الف) برخورد مرکزی مستقیم



قبل از برخورد

حالت حداکثر تغییر شکل

بعد از برخورد

$$V_1, V_2 \to V_1', V_2'$$

معلوم — مجهول

بقای مومنتم خطی 8

نیروی خارجی به سیستم ذرات وارد نمی‌گردد

$$\sum \vec{F} = 0 \to \Delta \vec{G} = 0 \to G = G' \to \boxed{m_1V_1 + m_2V_2 = m_1V_1' + m_2V_2'} \quad (I)$$

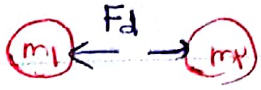
ضریب بازگشت (e)

مقدار ضربه در دوره‌ی بازیابی به مقدار ضربه در دوره‌ی تغییر شکل پذیری

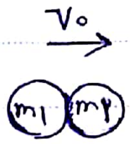
Scanned by CamScanner

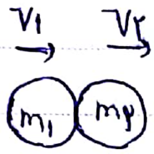
Subject
Date

نیروی بین ۲ جسم در دوره تغییر شکل

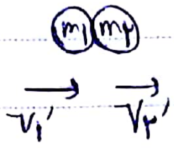


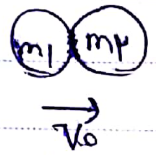
	$t=t_0$	$t=0$	
از شروع برخورد تا لحظه حداکثر تغییر شکل	لحظه حداکثر تغییر شکل	لحظه برخورد	دوره تغییر شکل

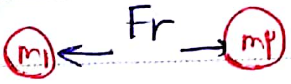




از حداکثر تغییر شکل تا لحظه جدا شدن	لحظه جدا شدن	لحظه حداکثر تغییر شکل	دوره بازیابی
	$t=t'$	$t=t_0$	







نیروی بین ۲ جسم در دوره بازیابی

F_r و F_d ثابت نیستند و $F_r<F_d$ چون یه مقداری انرژی تلف شده بعد از اینکه از هم جدا شوند.

(*) این رابطه قابلیت بازگشت اجسام به حالت اولیه را نشان می‌دهد.

$$e=\frac{\int_{t_0}^{t'} F_r\,dt}{\int_{0}^{t_0} F_d\,dt}$$

برای جسم اول: $e=\dfrac{m_1(v_1'-v_0)}{m_1(v_0-v_1)}$

برای جسم دوم: $e=\dfrac{m_2(v_2'-v_0)}{m_2(v_0-v_2)}$

حذف v_0 →

$$e=\frac{v_2'-v_1'}{v_1-v_2} \quad \text{(II)}$$

با داشتن e به کمک رابطه I و II، v_1' و v_2' بدست خواهد آمد.

PAPCO

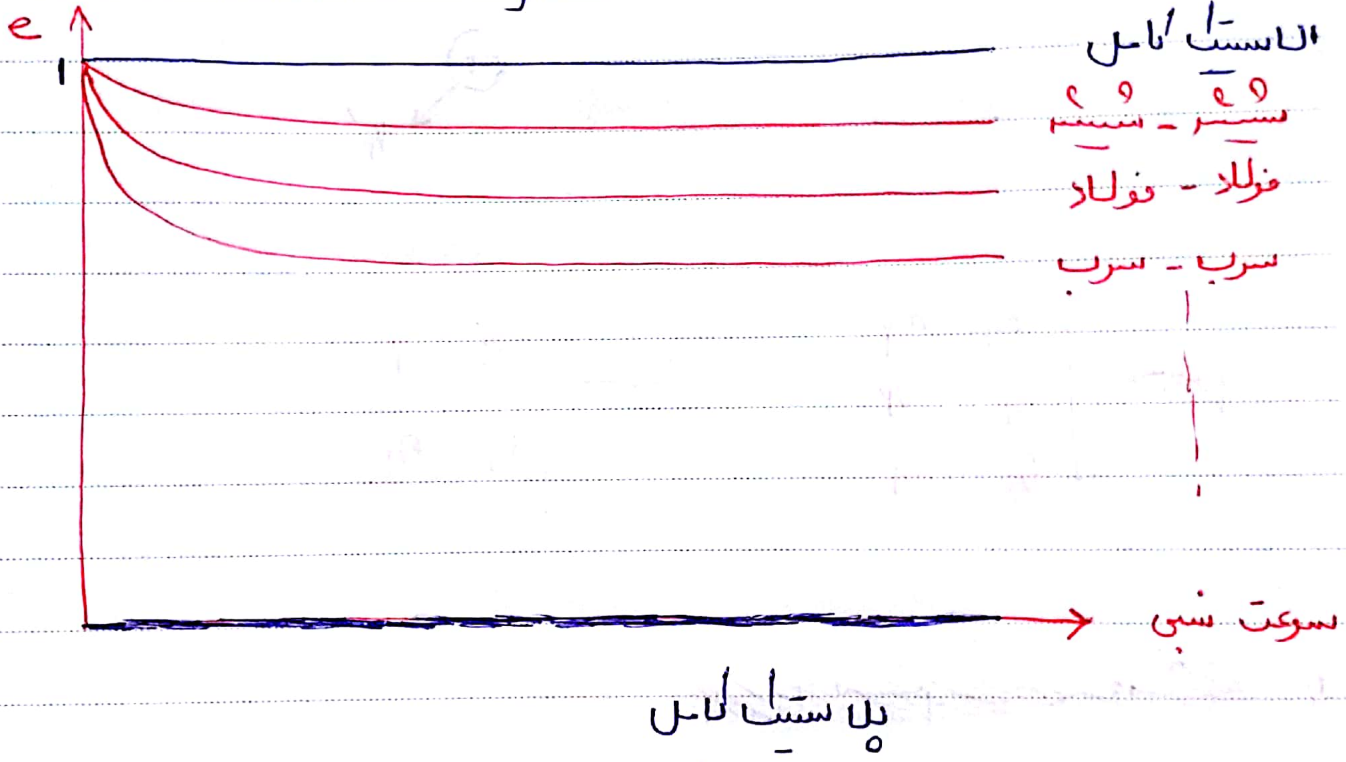
Scanned by CamScanner

برخورد پلاستیک کامل $\quad e=0 \longleftrightarrow v_2' = v_1'\quad$ حداکثر اتلاف انرژی

〃 الاستیک کامل $\quad e=1 \longleftrightarrow v_2' - v_1' = v_1 - v_2\quad$ بدون اتلاف انرژی

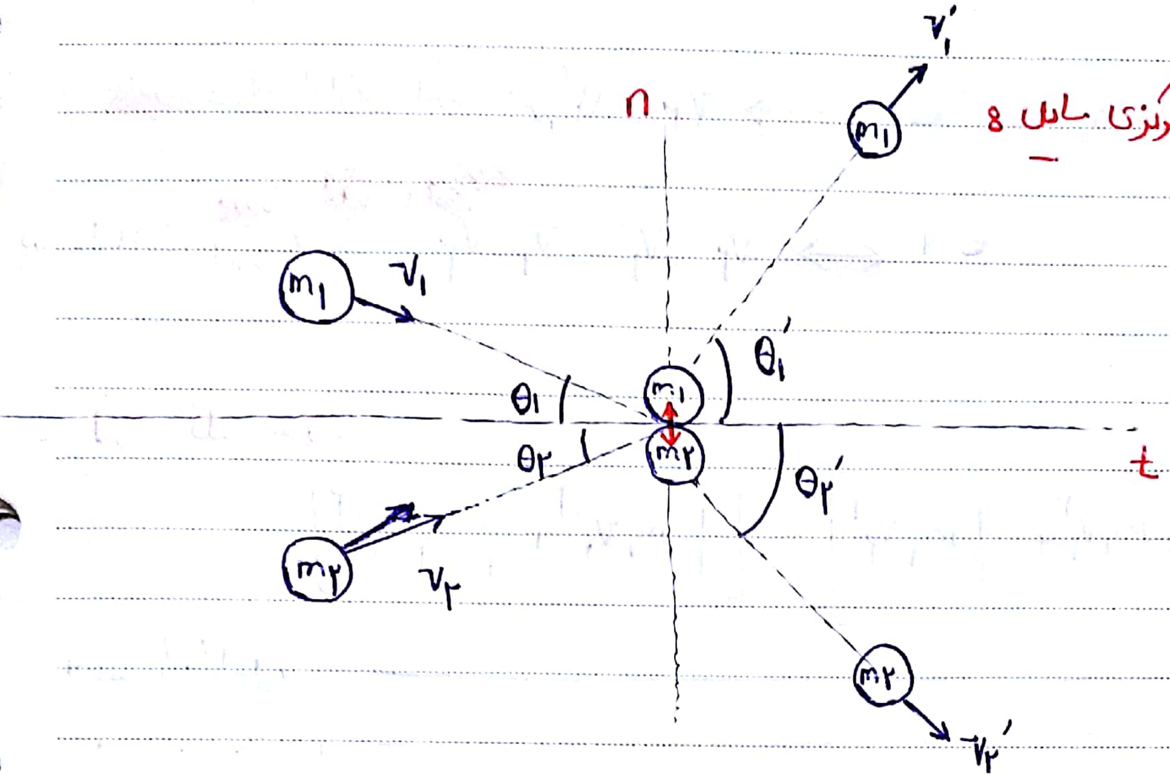
انرژی تلف شده

$$\Delta E = \left[\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2\right] - \left[\frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2\right]$$



e درحقیقت تابع سرعت نسبی نیز باشد ولی صرف نظر می گردد.

ب) برخورد مرکزی مایل 8



معلوم: m_1 , m_2 , v_1 , v_2 , θ_1 , θ_2

مجهول: v'_1 , v'_2 , θ'_1 , θ'_2

1) ~~[illegible]~~

$\Sigma F_n = 0 \rightarrow$ مومنتم سیستم در جهت n ثابت

$$m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n} = m_1 v'_{1n} + m_2 v'_{2n}$$

۲) و ۳) $F_t = 0 \rightarrow$ مومنتم هر ذره در جهت t ثابت

$$\begin{cases} m_1 v_{1t} = m_1 v'_{1t} \\ m_2 v_{2t} = m_2 v'_{2t} \end{cases}$$

واسه سیستم هم ری نویسیم تکرار می شد

جمع طرف چپ مساوی جمع طرف راست

بنابراین چیز تازه ای به ما نمی داد.

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject:
Date

ضریب بازگشت ۴۱

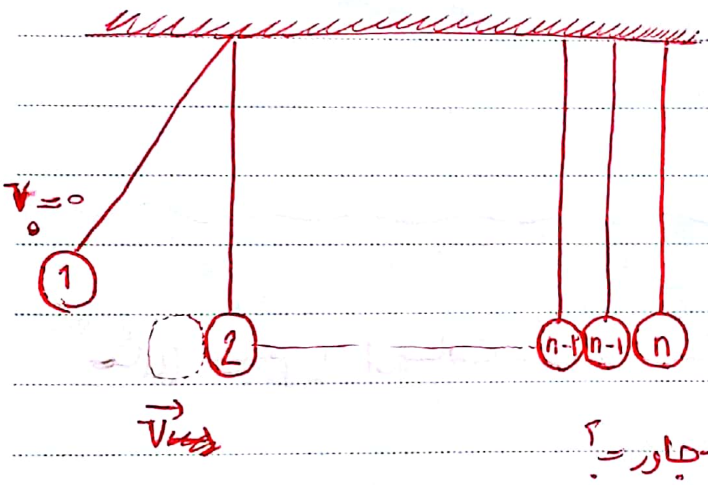
چون ضربه تعریفش $\int F dt$ بود لذا باید فقط واسه فرمول e در راستایی بنویسیم که نیرو وجود دارد.

(تعامل نیرویی در راستای n است ، طبق تعریف)

$$e = \frac{v'_{2n} - v'_{1n}}{v_{1n} - v_{2n}}$$

→ ۴ معادله ۴ مجهول → v'_{1t} v'_{1n} ، v'_{2t} v'_{2n} → v'_1 θ'_1 ، v'_2 θ'_2

مثال)



گوی‌ها جرم وطول یکسان

- جرم ۱ با سرعت اولیه صفر رها می‌شود و با سرعت v به جرم ۲ برخورد می‌کند.
- سرعت v_n بلافاصله پس از برخورد گوی چهارم = ؟
- ضریب بازگشت مشترک $e =$

جرم ۱ و ۲ : برخورد مرکزی مستقیم

$$\begin{cases} v_1 = v \\ v_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} v'_1 = ? \\ v'_2 = ? \end{matrix} \rightarrow$$

چون همه m ها ثابتند.

$$\rightarrow \begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \\ e = \dfrac{v'_2 - v'_1}{v_1 - v_2} \end{cases}$$

ادامه در صفحه بعد →

$$\rightarrow \begin{cases} v+0 = v_1' + v_2' \\ v_2' - v_1' = ev \end{cases} \rightarrow v_2' = \frac{1+e}{2} v$$

به طوری که سه تا همین اول ۲ می‌شن عقب ساکن یعنی حالا واسه بعدی v_2 ۲ با سرعت ثابت

می‌خوره به ۳ که سرعتش صفره و ———

جرم ۲ و ۳

$$v_2 = \frac{1+e}{2} v \qquad v_2' = ?$$

$$v_3 = 0 \qquad v_3' = ?$$

$$\rightarrow v_3' = \left(\frac{1+e}{2}\right)^2 v$$

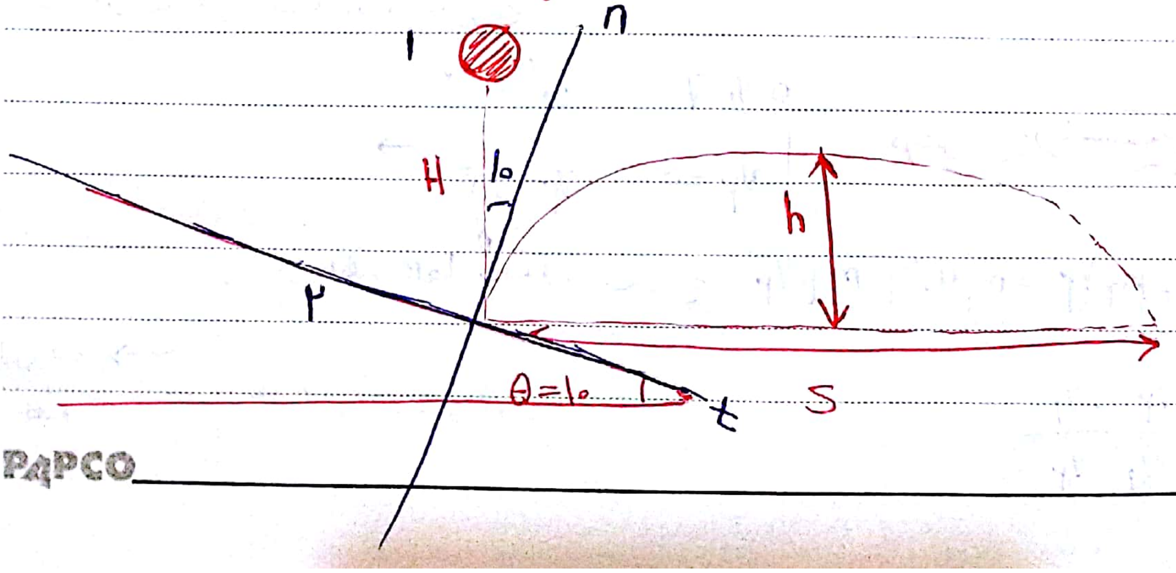
$$\rightarrow v_n' = \left(\frac{1+e}{2}\right)^{n-1} v$$

مثال) جسم ۱ از حالت سکون رها می‌شود

$H = 900\,mm$

$e < 0.7$

$h, S = ?$



Scanned by CamScanner

Subject:
Date

فرض

$v_1 = \sqrt{2gH}$, $v_2 = 0$, $v_2' = 0$

دقت لحظه ی برخورد نه رها شدن

چون زمین

$$\begin{cases} m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n} = m_1 v_{1n}' + m_2 v_{2n}' \\ m_1 v_{1t} = m_1 v_{1t}' \\ m_2 v_{2t} = m_2 v_{2t}' \\ e = \dfrac{v_{2n}' - v_{1n}'}{v_{1n} - v_{2n}} \end{cases}$$

ببین درسته این v_2' را صفر گرفتیم و فقط ناچیزه ولی مقدار m_2 خیلی بزرگه پس این صفر نمی شد.

این چرا صفر شد چون m_2 ها ساده شدند تک صفر شدند ربطی به فرض بالا نداره.

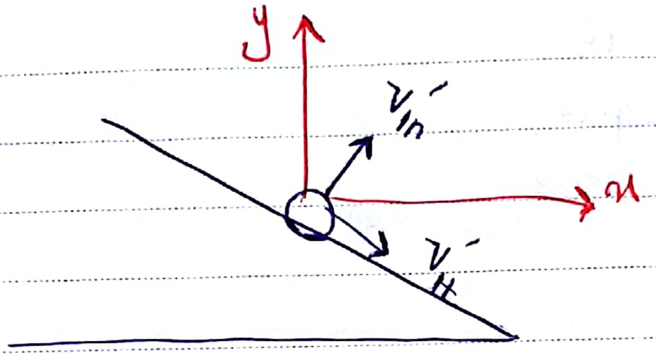
$$\rightarrow \begin{cases} m_1 v_{1n} = m_1 v_{1n}' + m_2 v_{2n}' \\ v_{1t} = v_{1t}' \\ e = \dfrac{-v_{1n}'}{v_{1n}} \rightarrow v_{1n}' = -e\, v_{1n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{1t} = \sqrt{2gH} \sin 10 \\ v_{1n} = -\sqrt{2gH} \cos 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_{1t}' = \sqrt{2gH} \sin 10 \\ v_{1n}' = 0{,}7 \sqrt{2gH} \cos 10 \end{cases}$$

PAPCO

Scanned by CamScanner

Subject:
Date



$$V'_{1x} = V'_{1t}\cos 10 + V'_{1n}\sin 10$$

و

$$V'_{1y} = -V'_{1t}\sin 10 + V'_{1n}\cos 10$$

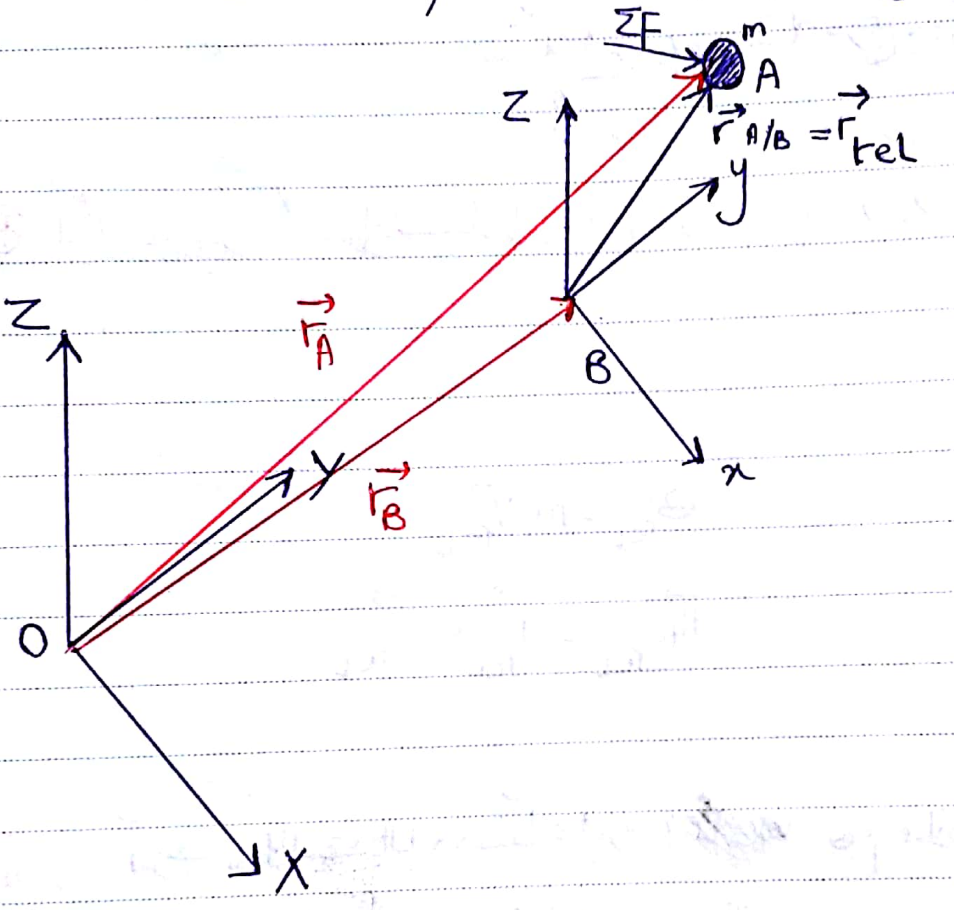
PAPCO

Scanned by CamScanner

حرکت نسبی :

- دستگاه xyz نسبت به مرجع ثابت XYZ دارای حرکت انتقالی می‌باشد.

- امتداد محورهای xyz همراه به موازات XYZ باقی می‌ماند.



$\vec r_A = \vec r_B + \vec r_{rel}$ حرکت انتقالی $\longrightarrow$ $\vec v_A = \vec v_B + \vec v_{rel}$ $\rightarrow$ $\vec a_A = \vec a_B + \vec a_{rel}$

قانون دوم نیوتن : $\Sigma \vec F = m\vec a_A = m(\vec a_B + \vec a_{rel})$

نکته: قانون دوم نیوتن نسبت به دستگاه مرجع شتابدار صادق نیست.

$\Sigma \vec F \neq m\vec a_{rel}$

PaPCO

Scanned by CamScanner

دستگاه مرجع انتقالی با سرعت ثابت : $\vec{a}_B = 0 \Rightarrow \sum \vec{F} = m\vec{a}_{rel}$

نکته: قانون دوم نیوتن برای دستگاه مرجع متحرک با سرعت ثابت و بدون دوران صادق است.

دستگاه اینرسی = دستگاه مرجع نیوتنی

* اثبات می گردد که معادلات کار و انرژی و ضربه و مومنتم نیز برای دستگاه اینرسی برقرار باشد.

$$\begin{cases} U_{rel} = \Delta T_{rel} \\ \sum \vec{F} = \dot{\vec{G}}_{rel} \qquad \vec{G}_{rel} = m\vec{v}_{rel} \\ \sum \vec{M}_B = \dot{H}_{B\,rel} \qquad \vec{H}_{B\,rel} = \vec{r}_{rel} \times \vec{G}_{rel} \end{cases}$$

نکته: اگرچه معادلات بالا در دستگاه اینرسی هم صادق می باشد اما مقادیر آن نسبت به دستگاه ثابت متفاوت است.

$$U = \Delta T \neq U_{rel} = \Delta T_{rel}$$

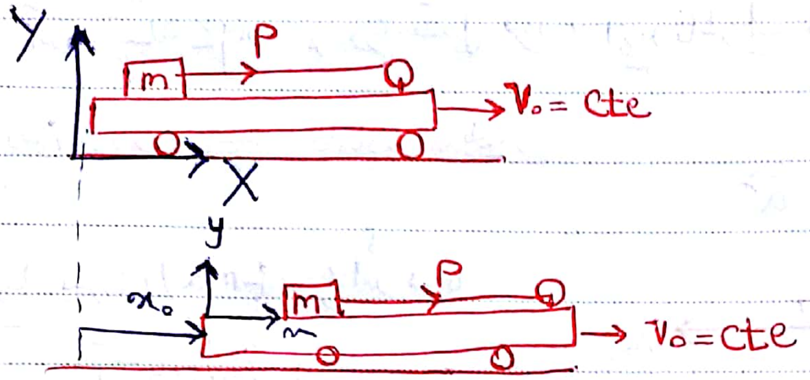
$$T = \frac{1}{2} m v_A^2 \neq T_{rel} = \frac{1}{2} m v_{rel}^2$$

$$\vec{G} = m\vec{v}_A \neq \vec{G}_{rel} = m\vec{v}_{rel}$$

Scanned by CamScanner

مثال ۱) - جرم m ساکن بدون اصطکاک

- سرعت نسبی و مطلق جرم m در موقعیت x ؟



چون سرعت ثابت ← شتاب صفر ،
فریم لخت روابط برقرار است.

$$U_{1-2})_{rel} = \Delta T_{rel} \qquad P_x = \frac{1}{2} m \dot{v}_{rel}^2 - 0 \qquad \dot{x}_{rel} = \sqrt{\frac{2P_x}{m}}$$

$$\dot{x} = V_0 + \dot{x}_{rel}$$

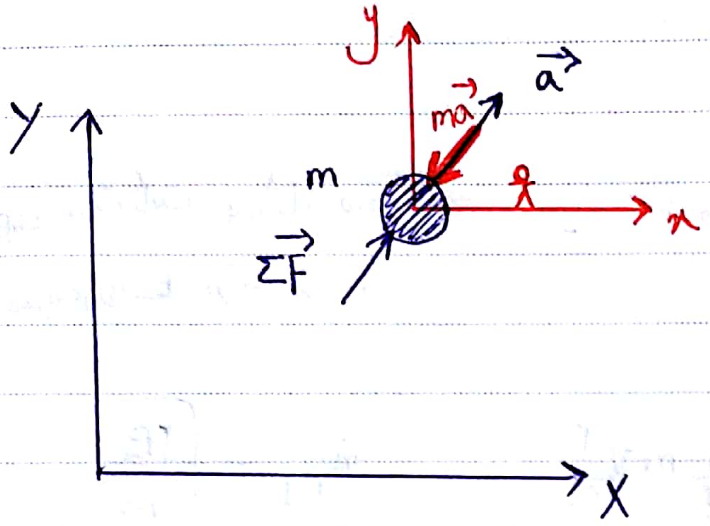
Subject:
Date

اصل دالامبر :

ذره m با شتاب مطلق $\vec{a}$ نسبت به دستگاه ثابت XYZ مفروض است. $\sum\vec{F}=m\vec{a}$

اگر دستگاه xyz به ذره متصل گردد ، از دید ناظر ایستاده در این دستگاه ذره ساکن می باشد

یعنی (ذره در حالت تعادل می باشد)



گویا نیروی $(-m\vec{a})$ بر ذره اثر کرده و $\sum\vec{F}$ خنثی شده است.

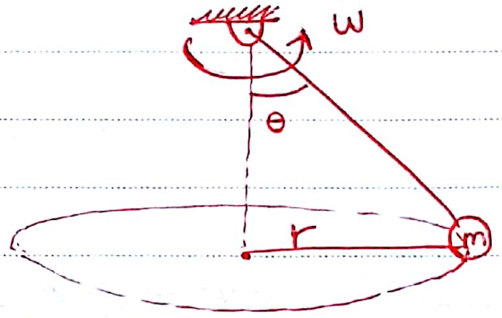
نیرو $-m\vec{a}$ را نیروی (نیروی اینرسی) گویند و این حالت تعادل مصنوعی را تعادل دینامیک می نامند.

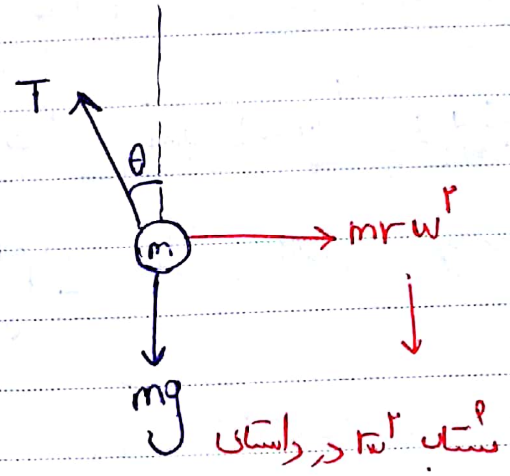
اصل دالامبر: تبدیل ظاهری یک مسئله دینامیکی به مسئله استاتیکی توسط اعمال نمودن نیروی اینرسی

P4PCO

Scanned by CamScanner

مثال)

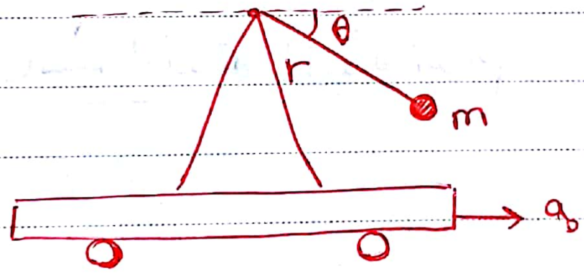




شتاب $r\omega^2$ در راستای شعاع به نیرو معادل این در خلاف جهت مرکزگرا قرار می‌دهیم و استاتیکی حل می‌کنیم.

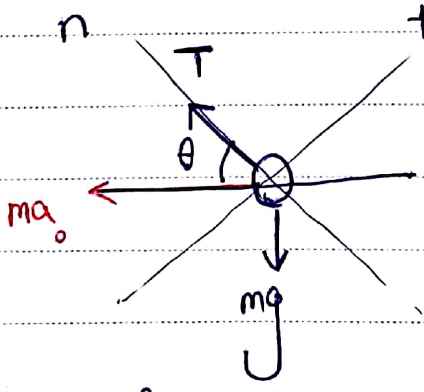
$$T\sin\theta - mr\omega^2 = 0$$

مثال)



$$T - mg\sin\theta = mr\dot{\theta}^2$$

$$mg\cos\theta = mr\ddot{\theta}$$



این روابط به صورتی که هستند درست نیست در واقع قانون دوم واسه این مسئله درست نیست چون به شتاب خارجی به علاوه مرکزگرا ←

اما می‌شه طبق اصل دالامبر به نیرو خلاف جهت این شتاب در نظر گرفت و حل کرد یعنی ma_0

Scanned by CamScanner

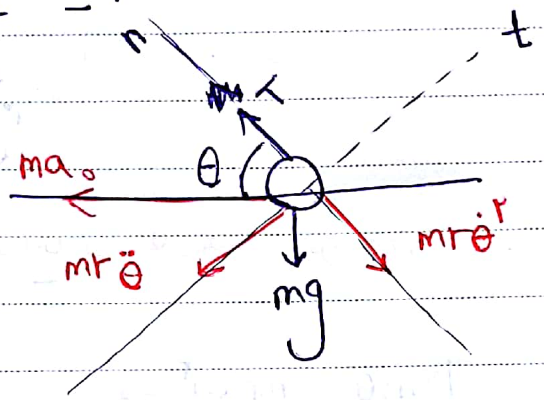
$T - mg\sin\theta + ma_0\cos\theta = mr\dot{\theta}^2$

$mg\cos\theta - ma_0\sin\theta = mr\ddot{\theta}$

تازه بازهم این حل یه دینامیکی است اگه می‌خواستیم کاملاً استاتیکی حل کنیم

باید واسه اون شتاب‌ها در راستای n و t هم یه نیرو در خلاف جهتشون در نظر می‌گرفتی

یعنی در کل:



البته ما مسیر این مسئله را قبلاً گفته بودیم که چطور باید با قانون دوم حل کرد.

PAPCO

Scanned by CamScanner